

## Geschichte

● **Godeaux, Lucien:** *Esquisse d'une histoire des sciences mathématiques en Belgique.* (Coll. Nat. Ser. 4, Nr. 39.) Bruxelles: Off. de Publ. J. Lebègue & Cie. 1943. 60 pag.

Belgien kann sich rühmen, in Quetelet (1796—1847) und (Bosmans 1882—1928) zwei sehr verdienstvolle Wissenschaftshistoriker hervorgebracht zu haben, die sich vorzugsweise mit den bedeutenden Mathematikern unter ihren Landsleuten beschäftigt haben. Sowohl der vlämische wie auch der wallonische Stamm haben hochbegabte Mathematiker gestellt. Aus dem 16. und 17. Jahrhundert wäre neben Stevin (den auch die Niederländer für sich in Anspruch nehmen) vor allem Adrianus Romanus und der geistvolle Sluse zu erwähnen, ferner aus dem Antwerpener Jesuitenkreis Gregorius a St. Vincentio, La Faille und Taquet; im 19. Jahrhundert blühten Quetelet, Dandelin, Catalan, Mansion und Le Paige. Verf. skizziert Bedeutung und Lebenswerk dieser Männer und ihres Schülerkreises in geschickten und treffenden Worten und versteht es, den historisch interessierten Leser durch kurze bibliographische Hinweise schnell an die wichtigste einschlägige Literatur hinzuführen.

*J. E. Hofmann* (Berlin).

**Heisenberg, W.:** Zum Andenken an David Hilbert. *Physik. Z.* **44**, 277—278 (1943).

**Grossmann, W.:** Otto Eggert. Nachruf. *Z. Vermessungswes.*, Stuttg. **73**, 49—54 (1944).

1874—1944. Biographie mit Schriftenverzeichnis *Harald Geppert* (Berlin).

**Berthold, A.:** Das Lebenswerk des überragenden Meisters der Erdmessung Friedrich Robert Helmert, geb. 1843 — gest. 1917. *Z. Geophys.* **18**, 87—99 (1944).

**Nagell, T.:** Erik Holmgren. *Norsk mat. Tidsskr.* **26**, 1—2 (1944) [Norwegisch].

**Cunningham, E.:** Sir Joseph Larmor. *J. London Math. Soc.* **18**, 57—64 (1943).

1857—1942. Biographie und wissenschaftliche Würdigung. *Harald Geppert*.

**Milne, E. A.:** Augustus Edward Hough Love. 1863—1940. *J. London Math. Soc.* **16**, 69—80 (1941).

Biographie, wissenschaftliche Würdigung, Schriftenverzeichnis.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Hardy, G. H.:** William Henry Young. *J. London Math. Soc.* **17**, 218—237 (1942).

1863—1942. Ausführliche Biographie, Analyse der mathematischen Schriften, vollständiges Schriftenverzeichnis.

*Harald Geppert* (Berlin).

## Algebra und Zahlentheorie

### Allgemeines. Kombinatorik:

**Dyson, F. J.:** Three identities in combinatory analysis. *J. London Math. Soc.* **18**, 35—39 (1943).

Es sei  $x_n = 1 - x^n$ ,  $\bar{x}_n = 1 + x^n$ ,  $x_n! = \prod_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{x}_n! = \prod_{i=1}^n \bar{x}_i$ ,  $x_n = x_{2n}$ ,  $x_n^2! = x_2 x_4 \dots x_{2n}$ ,  $x! = x_\infty!$ ,  $\bar{x}! = \bar{x}_\infty!$ ,  $x^2! = x_\infty^2!$ , dann beweist der Verf. drei Identitäten in  $x$ , welche von Rogers und Selberg (*Arch. Norske Vid. Akad.* 1936, Nr. 8) aufgestellt wurden:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (x_{7n+1} x_{7n+2} x_{7n+5} x_{7n+6})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n^2} \bar{x}!}{x_n^2! \bar{x}_{2n}!},$$



$$\prod_{n=0}^{\infty} (x_{7n+1} x_{7n+3} x_{7n+4} x_{7n+6})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n^2+2n} \bar{x}!}{x_n^2! \bar{x}_{2n}!},$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (x_{7n+2} x_{7n+3} x_{7n+4} x_{7n+5})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n^2+2n} \bar{x}!}{x_n^2! \bar{x}_{2n+1}!}.$$

Benützt werden die bekannten Identitäten

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+ax^{2n}) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \frac{x^{m(m+1)}}{x_m^2!}, \quad x^2! \prod_{n=0}^{\infty} (1+(z+z^{-1})x^{2n+1}+x^{4n+2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{n^2} z^n.$$

*E. Hlawka (Wien).*

**Rado, R.: Note on combinatorial analysis.** Proc. London Math. Soc. II. s. 48, 122—160 (1943).

Ein Gleichungssystem

$$a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \dots + a_{\mu n} x_n = b_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

heißt regulär in einem Zahlenbereich  $A$ , wenn es bei jeder Zerlegung von  $A$  in endlich viele Teilmengen in mindestens einer von diesen eine Lösung von (1) gibt. In einer früheren Note [Math. Z. 36, 424—480 (1933); dies. Zbl. 6, 146] wurden alle regulären Gleichungssysteme im Bereich der natürlichen Zahlen bestimmt. In dieser Note werden folgende Fälle behandelt: I.  $b_{\mu} = 0$ ,  $A$  ist ein Ring aus komplexen Zahlen mit Auslassung der Null. II.  $b_{\mu}$  beliebig,  $A$  ist der Körper der algebraischen oder der komplexen Zahlen. Im Fall II heißt die Bedingung für Regularität: Es soll in  $A$  eine Lösung mit  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  geben. Im Fall I ist die Bedingung komplizierter: die Symbole  $x_1, \dots, x_n$  sollen sich in Teilsysteme  $S_1, S_2, \dots, S_n$  zerlegen lassen, und es soll zu jedem  $\lambda$  ( $1 \leq \lambda \leq l$ ) eine solche Lösung  $(x_1, \dots, x_n)$  geben, daß die  $x_i$  des Teilsystems  $S_{\lambda}$  einander gleich und die aus  $S_{\lambda+1}, \dots, S_l$  Null sind. Insbesondere im Fall einer Gleichung ( $m = 1$ ) lautet die Bedingung: Die Summe von einigen Koeffizienten von (1) soll Null sein. Der Beweis von II beruht auf einer Verallgemeinerung eines Satzes von Baudet-v. d. Waerden, der besagt, daß das Gleichungssystem  $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \dots = x_{n-1} - x_n = x_{n+1}$  im Bereich der natürlichen Zahlen regulär ist. Die Verallgemeinerung, die nach Mitteilung des Autors von G. Grünwald herrührt, besagt: Ist  $S$  ein System von endlich vielen Gitterpunkten und werden alle Gitterpunkte in endlich viele Klassen eingeteilt, so gibt es in einer dieser Klassen ein zu  $S$  ähnliches und paralleles System von Gitterpunkten. *van der Waerden.*

● **Dörrle, Heinrich: Quadratische Gleichungen.** München u. Berlin: R. Oldenbourg 1943. 470 S. u. 22 Abb. geb. RM. 28.—.

Verf. bietet einen sehr umfassenden Stoff, wie er nicht unmittelbar aus dem Titel folgt. Es findet sich sehr viel Originelles in dem Buche. Hingewiesen sei, was den ersten Teil betrifft, auf die numerische Auflösung der quadratischen Gleichung, die sich aus dem wenig bekannten Horner-Verfahren ergibt, auf die originelle konstruktive Lösung, mit dem Seitentransversalsatz, auf die hübsche Behandlung der Wurzelgleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen. Im Teil „Die quadratische Irrationelle“ gibt der erste Abschnitt „Kettenbrüche“ zunächst die Theorie der Eulerpolynome. Hierdurch wird die Erledigung der diophantischen Gleichungen ersten Grades und der Hauptsätze über Kettenbrüche originell und wirkungsvoll vorbereitet. Der zweite Teil „Die quadratische Irrationelle“ (Abschnittstitel gleich Teiltitel) gibt einen schnellen Algorithmus zur Entwicklung einer quadratischen Irrationalzahl in einen Kettenbruch, worauf sich die weiteren bezüglichen Sätze schnell ableiten. Im Teil „Zahlentheoretischer Exkurs“ sei auf die Methoden zur tatsächlichen Auflösung der rein quadratischen Kongruenz — das ebenfalls behandelte quadratische Reziprozitätsgesetz gibt ja nur Entscheidung über die Lösbarkeit — hingewiesen. Die Teile



sind: I. Algebraische Theorie der quadratischen Gleichungen. II. Anwendungen der quadratischen Gleichungen 1. auf Extremaufgaben. 2. auf Lösung geometrischer Probleme. 3. Gleichungen mit einer Unbekannten, die sich auf quadratische zurückführen lassen. III. Die quadratische Irrationelle: 1. Kettenbrüche. 2. Die quadratische Irrationelle. IV. Zahlentheoretischer Exkurs. V. Die diophantische quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten: 1. Zurückführung auf Normalformen. 2. Quadratische Formen.

Holzer (Graz).

## Gruppentheorie:

Neumann, B. H.: On the number of generators of a free product. J. London Math. Soc. 18, 12—20 (1943).

Die Minimalzahl der Erzeugenden eines freien Produktes von beliebig vielen Gruppen ist die Summe der Minimalzahlen der Erzeugenden dieser Gruppen.

van der Waerden (Leipzig).

Neumann, B. H.: Adjunction of elements to groups. J. London Math. Soc. 18, 4—11 (1943).

Eine Gruppe  $g$  sei gegeben durch erzeugende Elemente  $g_1, g_2, \dots$  und definierende Relationen (1)  $r_1(g) = 0, r_2(g) = 0, \dots$ . Das Problem ist, die Gruppe zu erweitern zu einer Gruppe durch Hinzunahme von neuen Erzeugenden  $x_1, x_2, \dots$ , die die Relationen (2)  $w_1(x, g) = 1, w_2(x, g) = 1, \dots$  erfüllen. Zu dem Zweck faßt man (1) und (2) zusammen als definierende Relationen einer Gruppe  $\mathcal{G}$  auf.  $\mathcal{G}$  ist Faktorgruppe einer freien Gruppe  $\mathfrak{F}$  nach einem Normalteiler  $\mathfrak{R}$ ; ebenso ist  $g$  Faktorgruppe einer freien Gruppe  $\mathfrak{f}$  nach einem Normalteiler  $\mathfrak{r}$ . Ist nun  $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{f} = \mathfrak{r}$ , so ist das gestellte Erweiterungsproblem lösbar und  $\mathcal{G}$  ist die „größte“ Gruppe, die das Problem löst: alle anderen sind homomorphe Bilder von  $\mathcal{G}$ . Z. B. ist das Erweiterungsproblem dann lösbar, wenn (2) nur aus einer Relation  $x^m = g$  besteht. Ist eine Gruppe  $\alpha$  von Automorphismen von  $g$  gegeben, die man zu Automorphismen der erweiterten Gruppe zu erweitern wünscht, so ist auch dieses Erweiterungsproblem lösbar, falls es ohne Automorphismen lösbar ist. Es wird ein Beispiel einer Gruppe angegeben, in der jedes Element ein Quadrat ist und die einen Automorphismus der Ordnung 2 besitzt, der nur das Einselement fest läßt.

van der Waerden (Leipzig).

Bergström, Harald: Struktur der Erweiterungen abelscher Gruppen. Ark. Mat. Astron. Fys. 30 A, Nr 4, 1—10 (1944).

Verf. untersucht die Erweiterung  $\mathcal{G}$  einer Abelschen Gruppe  $\mathfrak{A}$ , indem er zunächst  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_m$  als Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung schreibt. Mit  $\mathcal{G}/\mathfrak{A} \cong \Gamma$  und  $\sigma$  aus  $\Gamma$  gehen bei den Automorphismen  $A \rightarrow A^\sigma$  die  $\mathfrak{A}_i$  ineinander über, und man kann  $\mathfrak{A}$  als Produkt  $\prod \mathfrak{B}_i$  schreiben, wobei jedes  $\mathfrak{B}_i$  ein direktes Produkt zyklischer Gruppen ist, die aus einer derselben durch obige Automorphismen hervorgehen:  $\mathfrak{B}_i = \prod \mathfrak{P}_{ij}$ . Es wird gezeigt, daß die Erweiterung  $\mathcal{G}$  von  $\mathfrak{A}$  durch die Erweiterungen  $\mathcal{G}_i$  von  $\mathfrak{B}_i$  bestimmt ist. Diese wiederum sind bestimmt, sobald man die Faktorgruppe  $\mathcal{G}_i/\mathfrak{B}_i$ , ferner die  $\mathfrak{P}_{ij}$  und  $\mathfrak{N}_{i1}/\mathfrak{P}_{i2} \times \dots \times \mathfrak{P}_{ik}$  kennt, wobei  $\mathfrak{N}_{i1}$  der Normalisator von  $\mathfrak{P}_{i1}$  ist. Hiermit ist eine Vermutung von Tschebotaröw bestätigt. Zum Schluß wird das Ergebnis benutzt, um im entsprechenden Fall die Galoissche Gruppe eines Klassenkörpers zu bestimmen.

J. J. Burckhardt.

## Ringe. Körper:

Dieudonné, Jean: Les déterminants sur un corps non commutatif. Bull. Soc. Math. France 71, 27—45 (1943).

$K$  sei ein Schiefkörper,  $K^n$  ein  $K$ -Linksmodul vom Rang  $n$ ,  $GL_n(K)$  die Gruppe der Automorphismen von  $K^n$ .  $GL_n(K)$  ist inversisomorph der Gruppe  $M_n(K)$  aller invertierbaren  $n$ -reihigen Matrizen mit Koeffizienten aus  $K$ .  $B_{ij}(\lambda)$ ,  $i \neq j$ , sei die Matrix, die in der Hauptdiagonale lauter Einsen, im Schnitt der  $i$ -ten Spalte und  $j$ -ten Zeile  $\lambda$ ,



sonst überall Null stehen hat. Die  $B_{ij}(\lambda)$  erzeugen eine Untergruppe  $C_n$  von  $M_n(K)$ , die Normalteiler und gleich der Kommutatorgruppe von  $M_n(K)$  ist. Ist  $K^*$  die Gruppe der Elemente  $t \neq 0$  von  $K$ ,  $C$  ihre Kommutatorgruppe, so ist die Faktorgruppe  $M_n(K)/C_n$  für jedes  $n > 1$  isomorph zu  $K^*/C$ . Jeder invertierbaren Matrix  $X$  aus  $M_n(K)$  kann nun folgendermaßen eine Determinante  $\Delta_n(X)$ , die ein Element aus der Abelschen Gruppe  $K^*/C$  ist, zugeordnet werden:  $\varphi(x)$  sei die Restklasse aus  $K^*/C$ , in der das Element  $x \in K^*$  liegt. Es sei  $\xi_{i1} \neq 0$  in der ersten Spalte von  $X$ ; durch Subtrahieren von Linksvielfachen der  $i$ -ten Zeile werden in der ersten Spalte sonst überall Nullen erzeugt;  $X'$  sei die jetzt nach Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $\lambda$ -ten Spalte übrigbleibende Matrix; dann wird  $\Delta_n(X) = \varphi[(-1)^{i+1} \xi_{i1}] \Delta_{n-1}(X')$  gesetzt. Es wird die Unabhängigkeit von  $\Delta_n(X)$  von dem speziellen Element der ersten Spalte bewiesen,  $\Delta_n$  ändert sich nicht, wenn  $X$  durch  $B_{ij}(\lambda) X$  ersetzt wird. Wird eine Zeile von  $X$  mit  $\mu \neq 0$  aus  $K$  von links multipliziert, so multipliziert sich  $\Delta_n$  mit  $\varphi(\mu)$ . Es ist  $\Delta_n(XY) = \Delta_n(X) \Delta_n(Y)$  und  $\Delta_n(X) = \Delta_n(X')$ . Für kommutatives  $K$  wird  $K^*/C = K^*$ , man erhält die übliche Determinante. Auch die Cramersche Regel kann verallgemeinert werden, man erhält allerdings nicht die Werte der Unbekannten  $X_i$  selbst, nur  $\varphi(x_i)$ . Es ist  $\Delta_n(X) = \Delta_n(AXA^{-1})$ ,  $\Delta_n$  ist also eine Invariante des durch  $X$  dargestellten Automorphismus von  $K^n$ . — Es werden nach dem Vorbild von Dickson weitere Sätze über  $GL_n(K)$  bewiesen: Ist  $n > 2$ , so enthält jeder Normalteiler von  $M_n(K)$ , der nicht im Zentrum  $Z_n$  liegt, die Gruppe  $C_n$ . Dies gilt auch für  $n = 2$ , wenn  $K$  mehr als 3 Elemente enthält. Ist  $n > 2$ , so ist jeder Normalteiler von  $C_n$ , der von  $C_n$  selbst verschieden ist, in  $C_n \cap Z_n$  enthalten. Für  $n = 2$  gilt dasselbe, wenn das Zentrum von  $K$  mehr als 5 Elemente enthält. *G. Köthe* (Gießen).

**Etherington, I. M. H.:** Some non-associative algebras in which the multiplication of indices is commutative. J. London Math. Soc. 16, 48—55 (1941).

Potenzen von  $x$  in einer nichtassoziativen Algebra werden rekursiv definiert: die Potenz 1. Grades ist  $x$  selbst und eine Potenz  $n$ -ten Grades ist ein Produkt einer Potenz  $n_1$ -ten Grades mit einer Potenz  $n_2$ -ten Grades ( $n_1 + n_2 = n$ ). Potenzen werden durch  $x^r$  bezeichnet, wo  $r$  keine gewöhnliche ganze Zahl, sondern ein Symbol wie  $(1+1) + \{(1+1) + 1\}$  ist, so daß  $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$ . Nun werden 2 Arten von kommutativen Algebren konstruiert, in denen die Gleichung

$$(x^r)^s = (x^s)^r \quad (1)$$

bewiesen werden kann, nämlich: 1. Die Algebren mit der Multiplikationstafel

$$a_1^2 = \lambda_1 a_2, a_2^2 = \lambda_2 a_3, \dots, a_{n-1}^2 = \lambda_{n-1} a_n, a_n^2 = \lambda_n a_1, a_\theta a_\varphi = 0 \quad (\theta \neq \varphi).$$

2. Barische Algebren, in welchen jedes Element  $x$  ein Gewicht  $\xi(x)$  hat, mit den Eigenschaften

$$\xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y), \quad \xi(xy) = \xi(x) \xi(y), \quad \xi(\alpha x) = \alpha \xi(x).$$

In einer kommutativen barischen Algebra erzeugen die Nilprodukte

$$x \cdot y = xy - \frac{1}{2} \xi y - \frac{1}{2} \eta x,$$

die alle das Gewicht Null haben, ein Ideal  $P$ . Wenn nun  $P^2 = 0$  ist, so gilt (1) für jedes  $x$ . *van der Waerden* (Leipzig).

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

**Benneton, Gaston:** Arithmétique des quaternions. Bull. Soc. Math. France 71, 78—111 (1943)

Im Anschluß an eine frühere Abhandlung (dies. Zbl. 28, 202) und zu ihrer Ergänzung untersucht der Verf. Quaternionen mit rationalen Koeffizienten und ihre Teilbarkeitsgesetze. Er hält es dabei für zweckmäßig, von der Lipschitzschen Ordnung auszugehen und von hier aus zu der Hurwitzschen Ordnung aufzusteigen. Wenn auch die Komplikationen der Lipschitzschen Ordnung gegenüber der maximalen Hurwitz-



schen Ordnung nicht sehr groß sind, so ist doch der vom Verf. eingeschlagene Weg grundsätzlich abzulehnen. Zuletzt gibt der Verf. Anwendungen auf orthogonale und hemiorthogonale Matrizen der Ordnungen 3 und 4. Brandt (Halle a. d. S.).

**Hasse, Helmut:** Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. 52, Abt. 1, 1—48 (1942).

Verf. unternimmt es in dieser Arbeit, eine Reihe von Tatsachen aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten, die in den letzten Jahren in vieler Hinsicht fortentwickelt worden ist, zusammenhängend darzustellen. Es handelt sich vor allem um die zahlentheoretische Seite der Theorie und die algebraischen Grundlagen für die Sätze über rationale und ganzzahlige Punktgruppen auf algebraischen Kurven, die entsprechenden Sätze für  $p$ -adische Punktgruppen und Punktgruppen mod.  $p$  von Lutz und Hasse und die algebraische Klassenkörperkonstruktion von Deuring. § 1 enthält die Grundbegriffe, algebraische Funktionenkörper  $K/\Omega$ , Divisoren, rationale Punkte (Primdivisoren ersten Grades), algebraische Punkte (Primdivisoren ersten Grades der durch algebraischen Abschluß des Konstantenkörpers  $\Omega$  zu  $\bar{\Omega}$  entstehenden algebraisch-abgeschlossenen Konstantenerweiterung  $\bar{K}/\bar{\Omega}$ ); § 2 die wichtigsten Tatsachen über Divisorenklassen, Riemann-Rochschen Satz und Folgerungen, ferner einen wohl neuen Satz: Ist  $M$  eine primitive Klasse,  $C$  eine Klasse mit  $\text{grad } C \geq 3g$  ( $g$  Geschlecht), so ist  $\{MC\} = \{M\}\{C\}$ , wo  $\{C\}$  den Modul der ganzen Divisoren von  $C$  bezeichnet, schließlich die zu einem ganzen Divisor  $m$  gehörige Erzeugung:

Wenn  $1, x_1, \dots, x_n$  eine Basis von  $\left\{\frac{1}{m}\right\}$  bedeutet, so ist der Integritätsbereich  $K^m$  aller  $z$  aus  $K$ , deren Nenner in Potenzen von  $m$  aufgehen, gleich  $\Omega[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , also  $K = \Omega(x_1, \dots, x_n)$ . Durch Angabe von  $x_1, \dots, x_n$  und das System  $(G_0)$  der algebraischen Gleichungen über  $\Omega$  zwischen den  $x_v$  ist  $K$  gegeben, daher Erzeugung. § 3 führt die homogene Betrachtungsweise ein, wobei der Homogenitätsfaktor, anders als sonst meist üblich, aus  $K$  genommen wird, was den Vorteil hat, daß er mit in die Arithmetik von  $K$  einbezogen werden kann (wird er als neue Unbestimmte angenommen, so ist das nicht möglich). Ein homogenes Elementsystem  $z_0:z_1:z_2:\dots:z_k$  bestimmt eindeutig ein zu ihm proportionales System teilerfremder ganzer Divisoren  $a_0:a_1:a_2:\dots:a_k$ , die einer Klasse, der Klasse  $A$  des Systems  $z_0:z_1:\dots:z_k$ , angehören. Wenn  $z_0, z_1, \dots, z_k$  eine Basis aller ganzen Divisoren von  $A$  ist und  $A$  hinreichend hohen Grad hat, so wird jeder algebraische Punkt  $\bar{p}$  von  $K$  eindeutig durch die Verhältnisse  $z_0(\bar{p}):z_1(\bar{p}):\dots:z_k(\bar{p})$  der  $z_v$  mod.  $\bar{p}$  festgelegt. Die  $\bar{p}_v = z_v(\bar{p})$  heißen die homogenen  $A$ -Koordinaten von  $\bar{p}$ . Geometrisch bedeutet dies, daß  $z_0:z_1:\dots:z_k$  im projektiven  $k$ -dimensionalen Raum ein singularitätenfreies projektives Modell von  $K$  erzeugen.  $\Omega(\bar{p}) = \Omega[\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n] = \Omega(\bar{p}_0:\bar{p}_1:\dots:\bar{p}_n)$  heißt der Koordinatenkörper von  $\bar{p}$ . Dies läßt sich auf beliebige ganze Divisoren verallgemeinern und führt zu Darstellungen  $\bar{p} = \frac{(\dots, \bar{p}_i z_i - \bar{p}_j z_j, \dots)}{(z_0, \dots, z_k)}$  bzw.  $a = \frac{(A_0(z), \dots, A_{r_a}(z))}{(z_0, \dots, z_k)^a}$  der algebraischen

Punkte  $\bar{p}$  bzw. der ganzen Divisoren  $a$  von  $K$  als Quotienten von größten gemeinsamen Teilern von Elementen, d. h. Hauptdivisoren. Dabei sind die  $A_i(z)$  Polynome der  $z_v$  mit Koeffizienten aus  $\Omega$ , den  $A$ -Koordinaten von  $a$ . — Eine Erzeugung  $K = \Omega(z_1, z_2, \dots, z_k)$  kann durch Einführung von Quotienten  $z_v/z_0$  statt  $z_v$  als homogene Erzeugung  $K = \Omega(z_0:z_1:\dots:z_k)$  mit einem  $(G_0)$  entsprechenden homogenen Gleichungssystem  $(G)$  zwischen den  $z_0, z_1, \dots, z_k$  aufgefaßt werden. Jedem algebraischen Punkt  $\bar{p}$  entspricht eine Lösung  $\bar{p}_0:\bar{p}_1:\dots:\bar{p}_n$  von  $(G)$ , es gilt aber auch die Umkehrung. — § 4 enthält die Sätze über die Divisorenklassengruppen. Klassen von  $K$  heißen rational, solche von  $\bar{K}/\bar{\Omega}$  algebraisch, Klassen nullten Grades heißen Nullklassen. Ganze Divisoren  $g$ -ten Grades heißen rationale bzw. algebraische Punktgruppen. Ist  $\mathfrak{D}$  eine feste Bezugspunktgruppe, so stellen die Brüche  $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{P}$  beliebige Punktgruppe, alle Nullklassen dar. Für  $g > 1$  ist diese Darstellung bei gegebenem  $\mathfrak{D}$  nicht immer eindeutig, weil es irreguläre Punktgruppen  $\mathfrak{P}$  mit  $\dim \mathfrak{P} > 1$  gibt. Die Klasse  $C$  heißt



$\mathfrak{D}$ -regulär, wenn  $\dim C\mathfrak{D} = 1$  ist, also  $C$  durch einen eindeutig bestimmten Quotienten dargestellt wird. Um die irregulären  $C$  zu behandeln, gibt es zwei Mittel: erstens den neuen Satz: Zu gegebener Anzahl  $r$  gibt es eine endliche Menge  $\mathfrak{D}$ , von algebraischen Punktgruppen  $\mathfrak{D}$ , so daß jedes System von  $r$  algebraischen Klassen  $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_r$  für mindestens ein  $\mathfrak{D}$  aus  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{D}$ -regulär ist; zweitens die Methode, als Bezugsgruppe die  $g$ -te Potenz  $\mathfrak{D}^g = \mathfrak{D}$  eines Primdivisors zu nehmen, und  $C$  durch  $\frac{\mathfrak{P}_\gamma}{\mathfrak{D}^\gamma}$  mit ganzem  $\mathfrak{P}_\gamma$  und minimalem  $\gamma$  darzustellen, dieses  $\mathfrak{P}_\gamma$  ist eindeutig. Der bekannte Zusammenhang dieser Dinge mit der Theorie der Integrale erster Gattung im klassischen Fall wird noch dargestellt. — § 5 handelt von dem zu  $K/\Omega$  gehörigen Abelschen Funktionenkörper  $K/\Omega$ , der so erhalten wird: zu  $\Omega$  werden  $g$  unabhängige Unbestimmte  $x_1, \dots, x_g$  adjungiert, und in der algebraisch abgeschlossenen Hülle  $\Omega(x_1, \dots, x_g)$  wird das Kompositum von  $g$  zu  $K = \Omega(x, y)$  isomorphen Körpern  $K_i = \Omega(x_i, y_i)$  betrachtet, das  $g!$  durch  $x_i, y_i \rightarrow x_{p_i}, y_{p_i}$  gegebene Automorphismen hat ( $p_1, \dots, p_g$  alle Permutationen von  $1, \dots, g$ ): deren Invariantenkörper ist  $K/\Omega$ . Man kann  $K$  auch als Koordinatenkörper einer Punktgruppe der Konstantenerweiterung  $K(x_1, \dots, x_g)/\Omega(x_1, \dots, x_g)$  erhalten, wenn jeder in ihr enthaltene Punkt transzendent, d. h. nicht schon in  $K/\Omega$  enthalten ist (höchsttranszendente Punktgruppe); jede solche Punktgruppe definiert einen bestimmten Isomorphismus von  $K/\Omega$  auf einen Teilkörper von  $\Omega(x_1, \dots, x_g)/\Omega$ . Dies sind die *Darstellungen* von  $K/\Omega$ . — In § 6 werden die Translationen, Spiegelungen und Meromorphismen des Abelschen Funktionenkörpers betrachtet. Ist  $C$  eine rationale Nullklasse von  $K/\Omega$ , so wird durch  $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{X}C$  jeder höchsttranszendenten Punktgruppe  $\mathfrak{X}$  umkehrbar eindeutig eine andere höchsttranszendente Punktgruppe  $\mathfrak{X}'$  zugeordnet, deren Koordinatenkörper  $\Omega(\mathfrak{X}')$  mit  $\Omega(\mathfrak{X})$  zusammenfällt. Diese Zuordnung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$  und zugleich der entstehende Automorphismus von  $K \cong \Omega(\mathfrak{X}) = \Omega(\mathfrak{X}')$  heißt die *Translation*  $\tau_C$ . Die *Spiegelungen* werden ähnlich erklärt. Es läßt sich nun die Wirkung der Multiplikatoren von  $K/\Omega$  (vgl. Ref., dies. Zbl. 16, 346) auf den Abelschen Funktionenkörper erklären: ein Multiplikator  $\mu$  ist ein gewisser Endomorphismus  $C \rightarrow \mu C$  der Klassengruppe von  $K/\Omega$ . Sind  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{U}$  rationale Punktgruppen,  $\mathfrak{Y}$  höchsttranszendent, so gibt es in  $A = \Omega(\mathfrak{Y})$  mindestens eine Punktgruppe  $\mathfrak{X}$  mit  $\mathfrak{D} \sim \mu \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{U}}$ .  $\mu$  heißt regulär, wenn  $\mathfrak{X}$  ebenfalls höchsttranszendent ausfällt,  $\mathfrak{X}$  ist dann eindeutig durch  $\mathfrak{D}, \mathfrak{U}, \mathfrak{Y}$  bestimmt, die Darstellung  $K = \Omega(\mathfrak{X})$  des Abelschen Funktionenkörpers ist in der Darstellung  $A = \Omega(\mathfrak{Y})$  enthalten, wodurch, wenn entsprechende Koordinaten von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$  einander zugeordnet werden, ein Meromorphismus  $\mu_{\mathfrak{D}, \mathfrak{U}}$  von  $A/\Omega$  auf  $K/\Omega$  bestimmt ist.  $A = K_\mu$ , der  $\mu$ -Teilungskörper von  $K$ , ist von endlichem Grade über  $K$ , dieser Grad heißt die *Norm*  $N(\mu)$  von  $\mu$ , es gilt dann offenbar  $N(\mu_1 \mu_2) = N(\mu_1) N(\mu_2)$ , was auch für irreguläre  $\mu$  richtig bleibt, wenn für sie  $N(\mu) = 0$  gesetzt wird. Die analytische Theorie liefert im klassischen Fall, daß ein natürlicher Multiplikator  $n$ , d. h. die Potenzierung der Klassen mit dem Exponenten  $n$ , regulär mit der Norm  $n^{2g}$  ist. Für allgemeines  $\Omega$  ist dies nur im Fall  $g = 1$  bewiesen (Hasse, dies. Zbl. 14, 249 u. Ref., dies. Zbl. 24, 13), für beliebiges  $g$  steht der Beweis noch aus. — In § 7 werden die algebraischen Punkte von  $K$ , das sind die Homomorphismen auf algebraische Erweiterungen von  $\Omega$ , und die Primdivisoren, das sind Bewertungen von  $K/\Omega$ , untersucht. Es wird eine homogene Transzendenzbasis  $X_0, X_1, \dots, X_g$  zugrunde gelegt. Ein Punkt heißt zu ihr gehörig, wenn  $X_0 : X_1 : \dots : X_g$  durch ihn auf ein bestimmtes Verhältnissystem abgebildet wird, ein Primdivisor, wenn die Reste der  $X_i$  nach ihm ein homogenes System vom Transzendenzgrad  $g-1$  über  $\Omega$  bilden. Ist eine höchsttranszendente Punktgruppe  $\mathfrak{X} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_g$  von  $K/\Omega$ , also eine Darstellung  $K = \Omega(\mathfrak{X})$  des Abelschen Funktionenkörpers, gegeben, so entsprechen die algebraischen Punkte von  $K/\Omega$ , die zu den symmetrischen Grundfunktionen  $X_0, \dots, X_g$  der  $g$  Restpaare  $x_0(\mathfrak{x}_i), x_1(\mathfrak{x}_i)$  einer homogenen Transzendenzbasis  $x_0, x_1$  von  $K/\Omega$  gehören, umkehrbar eindeutig den algebraischen Punktgruppen  $\bar{\mathfrak{P}} = \bar{p}_1 \dots \bar{p}_g$  von  $K/\Omega$ : um zu dem zu-



gehörigen Punkt von  $K$  zu gelangen, hat man im wesentlichen  $x_0(x_i), x_1(x_i)$  nach  $\mathfrak{p}$  zu reduzieren, Permutationen der  $\mathfrak{p}_i$  ändern wegen der Symmetrie von  $K/\Omega$  nichts. Wesentlich ist, daß gerade die zu  $X_0, \dots, X_g$  gehörigen Punkte auf diese Weise herauskommen. Der  $\mathfrak{P}$  zugeordnete Punkt werde mit  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  bezeichnet. An Primdivisoren werden nur folgende betrachtet: Jedem Divisor  $\mathfrak{a}$  von  $K$  entspricht im isomorphen  $K\varphi_i$ , der durch  $z \rightarrow z\varphi_i = z(x_i)$  gegeben ist, ein Divisor  $\mathfrak{a}\varphi_i = \mathfrak{a}(x_i)$ . Wird für einen Primdivisor  $\mathfrak{p}(x_i)$  auf die Konstantenerweiterung  $K\varphi_i (K\varphi_1 \dots K\varphi_{i-1} K\varphi_{i+1} \dots K\varphi_g) / (K\varphi_1 \dots K\varphi_{i-1} K\varphi_{i+1} \dots K\varphi_g)$  übertragen, so sind die  $\mathfrak{p}(x_1), \dots, \mathfrak{p}(x_g)$  ein volles System über  $K/\Omega$  konjugierter Primdivisoren, sie bestimmen also alle den gleichen, mit  $\mathfrak{p}(\mathfrak{X})$  bezeichneten Primdivisor von  $K/\Omega$ . Wesentlich ist nun der folgende, von van der Waerden mit algebraisch-geometrischen Methoden bewiesene Satz: Sind zwei Darstellungen  $K = \Omega(\mathfrak{X})$  und  $K = \Omega(\mathfrak{X}')$  von  $K$  gegeben, und ist  $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \sim \frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{D}'}$  mit rationalen  $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ , also  $\mathfrak{X}$  in  $\mathfrak{X}'$  durch eine Translation überführbar, so folgt, wenn  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} \sim \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{D}'}$  mit regulärem  $\mathfrak{P}'$  ist, daß der Punkt  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{P}'$  mit dem Punkt  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  übereinstimmt und umgekehrt. Es sei nun  $A$  eine algebraische Nullklasse von  $K/\Omega$  und  $X$  eine feste höchsttranszendente Nullklasse.  $\mathfrak{D}$  sei eine rationale Punktgruppe,  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}}$  in  $A$ ,  $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}}$  in  $X$ . Dann ist nach dem obigen der Punkt  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  unabhängig von  $\mathfrak{D}$  durch  $A$  bestimmt. Daher ist auf die Möglichkeit irregulärer  $\mathfrak{P}$  zu achten, sie wird mittels des Hilfssatzes von § 4 behandelt. Auf diese Weise sind den Nullklassen von  $K/\Omega$  umkehrbar eindeutig Punkte von  $K/\Omega$  zugeordnet, und zwar rationalen Klassen rationale Punkte. — In § 8 wird die Zerlegung der Punkte von  $K/\Omega$  im  $\mu$ -Teilungskörper  $K\mu$  betrachtet, der Multiplikator  $\mu$  sei dabei regulär und separabel, d. h.  $K\mu/K$  sei separabel. Es sei  $K = \Omega(\mathfrak{X})$ ,  $K\mu = \Omega(\mathfrak{Y})$  und  $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \sim \mu \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{U}}$  mit rationalen  $\mathfrak{D}, \mathfrak{U}$ . Dann gilt entsprechend dem Satz in § 7, und ebenfalls von van der Waerden bewiesen: Ist  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} \sim \mu \frac{\bar{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{U}}$ ,  $\bar{\mathfrak{D}}$  regulär, dann ist einer der in  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  enthaltenen Punkte  $(\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P})_*$  von  $K\mu$  gleich  $\mathfrak{Y} \rightarrow \bar{\mathfrak{D}}$  und umgekehrt, entsprechend für reguläres  $\mathfrak{P}$ . Mit seiner Hilfe wird gezeigt: Jede Nullklasse  $\bar{\mathfrak{D}}$  ist in der Form  $\bar{\mathfrak{D}} = \mu \bar{\mathfrak{D}}_1$  darstellbar. Die Anzahl der Lösungen  $\bar{\mathfrak{D}}_1$  dieser Gleichung ist  $N(\mu)$ . Und hieraus wird wie im Falle  $g = 1$  geschlossen, daß  $K\mu$  über  $K$  unverzweigt ist für das System der  $X$ -Punkte von  $K\mu/\Omega$ , das mit dem der  $Y$ -Punkte zusammenfällt. Ist  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  ein Punkt von  $K/\Omega$ , so zerfällt er in alle die Punkte  $\mathfrak{X} \rightarrow \bar{\mathfrak{D}}_i$  mit  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} \sim \mu \frac{\bar{\mathfrak{D}}_i}{\mathfrak{U}}$ , es sind also die Klassen  $\bar{\mathfrak{D}}_i$  von  $\frac{\bar{\mathfrak{D}}_i}{\mathfrak{U}}$  gerade die Lösungen von  $\mu \bar{\mathfrak{D}}_i = \bar{\mathfrak{D}}$ ,  $\bar{\mathfrak{D}}$  Klasse von  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}}$ . — In § 9 wird die A. Weilsche Theorie der Distributionen für Funktionenkörper einer Unbestimmten neu entwickelt, wobei an Stelle von Idealen mit Divisoren gearbeitet wird.

Deuring (Posen).

**Hasse, Helmut:** Der  $n$ -Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitsatz. Math. Z. 48, 48—66 ((1942)).

$\Omega$  sein ein beliebiger Körper und  $K = \Omega(x, y)$  ein elliptischer Funktionenkörper der Unbestimmten  $x$  mit dem Konstantenkörper  $\Omega$ . Für einen Meromorphismus  $\mu \neq 0$  von  $K/\Omega$  wird der Körper  $K\mu$  betrachtet,  $K$  ist dann der  $\mu$ -Teilungskörper von  $K\mu$ . Es wird untersucht, wie die Primdivisoren ersten Grades von  $K\mu$  in  $K$  zerfallen. Der Zerlegungstypus eines solchen Primdivisors  $\mathfrak{p}\mu$  wird nicht bloß durch die Relativgrade seiner  $K$ -Primfaktoren  $\mathfrak{P}$  beschrieben wie bei Zahlkörpern, wo durch den Relativgrad ja schon die Erweiterung des Restklassenkörpers eindeutig bestimmt ist, vielmehr muß der Typus des Restklassenkörpers von  $K$  modulo  $\mathfrak{P}$  als Erweiterung des Restklassenkörpers von  $K\mu$  modulo  $\mathfrak{p}\mu$  angegeben werden. Es sei nun  $n$  eine natürliche, nicht



durch die Charakteristik von  $\Omega$  teilbare Zahl und es werde vorausgesetzt, daß  $K$  einen Primdivisor ersten Grades (rationalen Punkt)  $\mathfrak{o}$  habe und daß die  $n$ -Teilungsklassen von  $K$  (das sind die Divisorenklassen, deren  $n$ -te Potenz 1 ist) des durch algebraisches Abschließen von  $\Omega$  zu  $\bar{\Omega}$  entstehenden Körpers  $\bar{K} = K\bar{\Omega}$  rational, d. h. in  $K$  vorhanden, sind. Dann erweist sich  $K$  als Abelscher Kummerscher Körper vom Typus  $(n, n)$  über  $K$ , und zwar ist  $K = K n \left( \sqrt[n]{z_J n_0} \right)$ , wo, wenn  $\frac{i}{\mathfrak{o}}$  Vertreter der  $n^2$   $n$ -Teilungsklassen sind,  $z_J \cong \left( \frac{i}{\mathfrak{o}} \right)^n$  ist und  $n_0$  den für  $\mathfrak{o}$  normierten Meromorphismus  $n$  bedeutet. [Vgl. hierfür auch Ref., Math. Ann. 106, 77—102 (1932); dies. Zbl. 4, 290.]  $\mathfrak{p}$  sei ein Primdivisor ersten Grades von  $K_J$ ,  $z_J$  kann zu  $\mathfrak{p}$  prim angenommen werden. Dann ist der Restklassenkörper  $\Omega_{\mathfrak{p}}$  der  $K$ -Primteiler von  $\mathfrak{p}$   $n_0$  durch  $\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega \left( \sqrt[n]{z_J(\mathfrak{p})} \right)$  gegeben, wo  $z(\mathfrak{p})$  den Rest modulo  $\mathfrak{p}$  von  $z$  bedeutet. Zwei Primdivisoren ersten Grades  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}'$  von  $K$  heißen  $n$ -äquivalent,  $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}'$ , wenn  $\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}}$  der  $n$ -ten Potenz einer Divisorenklasse angehört. Es gilt das Zerlegungsgesetz: Der Typus von  $\Omega_{\mathfrak{p}}$  hängt nur von der  $n$ -Klasse von  $\mathfrak{p}$  ab, und  $\mathfrak{p} n_0$  zerfällt genau dann voll in  $K$ , wenn  $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{o}$  ist. Genauer:  $z_J(\mathfrak{p}')$  und  $z_J(\mathfrak{p})$  gehören genau dann der gleichen  $n$ -Klasse in  $\Omega$  an, d. h. ihr Quotient ist eine  $n$ -te Potenz in  $\Omega$ , wenn  $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}'$  gilt, und zwar kann  $z_J(\mathfrak{p})$  durch  $z_J \tau_{\mathfrak{o}, \mathfrak{p}} \bar{n} z_J(\mathfrak{p}) z_{\mathfrak{p}}$  in  $K$  berechnet werden, wo  $\tau_{\mathfrak{o}, \mathfrak{p}}$  die  $\mathfrak{o}$  in  $\mathfrak{p}$  überführende Translation von  $K/\Omega$  ist. Die zu diesem Ergebnis führende Schlußweise muß mit dem Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei Elementarintegralen dritter Gattung zusammenhängen. Das Zerlegungsgesetz wird zu einem algebraischen Beweis des Satzes von Mordell und Weil benutzt, daß für einen endlichen algebraischen Zahlkörper  $\Omega$  die Gruppe der Klassen endlicher Ordnung von  $K$  eine endliche Basis hat. Der Weilsche Beweis benutzt das obige Zerlegungsgesetz für  $n = 2$ , das aus der Kummerschen Erzeugung der Zweiteilungskörper entspringt, wie sie von der Theorie der Thetafunktionen geliefert wird. Der neue Beweis, der sonst dem Mordell-Weilschen Gedankengang folgt, legt also den algebraischen Kern klarer dar, weil er von speziellen Formeln keinen Gebrauch macht, er dürfte darum auch verallgemeinerungsfähiger sein. *Deuring.*

### Zahlentheorie:

Schuh, Fred.: Kann  $n - 1$  durch  $\varphi(n)$  teilbar sein, wenn  $n$  teilbar ist? *Mathematica*, Zutphen B 12, 102—107 (1944) [Holländisch].

Ohne das Problem lösen zu können, ob es ganze Nichtprimzahlen  $n$  gibt, für die  $n - 1$  durch  $\varphi(n)$  teilbar ist, stellt Verf. einige elementare Eigenschaften solcher  $n$  zusammen: 1.  $n$  ist ungerade und frei von mehrfachen Primfaktoren, 2. ist  $p/n$ ,  $p$  Primzahl, dann enthält  $n$  keinen Primfaktor der Gestalt  $mp + 1$ , 3. ist  $n = p_1 p_2 \dots p_k$ , und ist  $2^{\lambda_i}$  die höchste in  $p_i - 1$  ( $i = 1 \dots k$ ) aufgehende Potenz von 2, so muß die kleinste der Zahlen  $\lambda_i$  unter diesen eine gerade Anzahl von Malen vorkommen, 4. aus  $n = 3m$  folgt  $(n - 1)/\varphi(n) = 3r + 1$ , 5.  $n$  hat wenigstens 12 (verschiedene) Primfaktoren. Falls es also ein  $n$  der gesuchten Art gibt, muß es über  $3 \cdot 10^{16}$  liegen.

Harald Geppert (Berlin).

Bruijn, N. G. de: Über die Lösungsanzahl des Systems  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 = m$ . *Nieuw Arch. Wiskde.* II. s. 22, 53—56 (1943).

Das Problem hat Kloosterman (dies. Zbl. 26, 202) mit analytischen Methoden behandelt. Der Verf. bringt dafür einen elementaren Beweis, bei dem er den Körper der dritten Einheitswurzeln heranzieht. Er erhält damit für die Lösungsanzahl  $r_3(n, m) = \alpha_N F(N)$ , dabei ist  $N = \frac{1}{2}(3n - m^2)$ ,  $\alpha_N = 6$ , wenn  $N \equiv 0(3)$ ,  $\alpha_N = 3$ , wenn  $N \not\equiv 0(3)$ ,  $F(N) = \sum_{d|N} \left( \frac{-3}{d} \right)$  für  $N = 1, 2, 3 \dots$ ,  $F(0) = \frac{1}{6}$ ,  $F(N) = 0$ , wenn  $N$  nicht ganzzahlig. Dabei wird das Kroneckersche Restsymbol benutzt.

E. Hlawka (Wien).



**Mordell, L. J.:** On Ryley's solution of  $x^3 + y^3 + z^3 = n$ . J. London Math. Soc. 17, 194—196 (1942).

Es werden drei rationale Funktionen  $x, y, z$  der Veränderlichen  $d$  und  $m$  mit rationalen Koeffizienten angegeben, die identisch die Gleichung

$$(1) \quad (x + y + z)^3 - dxyz = m$$

erfüllen und entsprechend der Tatsache, daß  $tx, ty, tz$  die Gleichung (1) mit  $t^3m$  statt  $m$  lösen, noch einen Parameter  $t$  rational enthalten. Hiernach hat (1) für je zwei rationale Zahlen  $d \neq 0$  und  $m$  unendlich viele rationale Lösungen  $x, y, z$ , die sich überdies als rationale Funktionen eines Parameters  $t$  schreiben. Setzt man hingegen  $d = 24$ ,  $m = 8n$  ein, so ergeben sich aus  $x, y, z$  leicht drei rationale Funktionen  $X, Y, Z$  der Veränderlichen  $n$  mit rationalen Koeffizienten, die identisch die Gleichung

$$(2) \quad X^3 + Y^3 + Z^3 = n$$

befriedigen und noch einen Parameter  $t$  von der obigen Bedeutung rational enthalten, und zwar dieselben, mit deren Hilfe Ryley [The Ladies' Diary 1825, 35; vgl. Dickson, History of the theory of numbers 2, 726 (1920), wo  $a$  durch  $n$ ,  $d$  durch  $4nt$  zu ersetzen ist] für rationales  $n$  die Existenz unendlich vieler, rational von einem Parameter abhängiger Lösungen der Gleichung (2) in rationalen, unendlich oft auch positiven Zahlen  $X, Y, Z$  bewies.

Weber (Berlin).

**Richmond, H. W.:** A note upon Prof. Mordell's paper. J. London Math. Soc. 17, 196—199 (1942).

Das von Mordell (vorangehendes Referat) neu bewiesene Ergebnis von Ryley zerlegt jede Zahl  $\alpha$  additiv in drei Kuben von Zahlen des Körpers von  $\alpha$ , übrigens auf unendlich viele, von einem Parameter  $t$  rational abhängige Arten, da man statt  $\alpha$  auch zunächst  $t^3\alpha$  zerlegen kann. Verf. hat [Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 2, 92—100 (1930)] eine ebensolche, davon unabhängige Zerlegung angegeben. Er setzt nun auseinander, daß Ryleys Leistung darin bestand, durch Addition der Kuben dreier Polynome mit rationalen Koeffizienten ein Polynom  $F(t)$  zu erhalten, das bis auf einen kubischen Faktor  $h^3$  eine gebrochene lineare Funktion von  $t$  ist. Es handelt sich um  $F(t) = K(t - a)^6(t - b)^2(t - c)$  mit passenden rationalen  $K, a, b, c$ , und es wird  $h = (t - a)^2(t - b)$ . Dieses Ergebnis und das des Verf. werden durch geometrische Betrachtungen auf eine gemeinsame Wurzel zurückgeführt.

Weber (Berlin).

**Mordell, L. J.:** Note on cubic diophantine equations  $z^2 = f(x, y)$  with an infinity of integral solutions. J. London Math. Soc. 17, 199—203 (1942).

Bewiesen wird zunächst, daß die Gleichung

$$z^2 = x^3 + y^3 - 1$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $(x, y) = 1$  hat. Zu diesem Zweck werden aus der Lösung  $x = y = z = 1$  durch den Ansatz  $x = 1 + 2\xi t$ ,  $y = 1 + 2\eta t$  andere gewonnen, von denen eine unendliche Teilmenge auch den Nebenbedingungen genügt; den Schlüssel bildet die Lösung der Gleichung  $\xi^2 - 6\xi\eta + \eta^2 = -4$  mit  $\xi + \eta \equiv 0 \pmod{3}$ . Sodann wird ein Verfahren angegeben, Gleichungen von der Gestalt

$$(1) \quad z^2 = ax^3 + by^3 + c$$

mit nichtverschwindenden ganzen Koeffizienten  $a, b, c$  und unendlich vielen ganzzahligen Lösungen  $x, y, z$  aufzustellen. Aus einer ganzzahligen Lösung  $p, q, r$  mit  $r \neq 0$  erzeugt nämlich der Ansatz  $x = p + \xi t$ ,  $y = q + \eta t$  unendlich viele andere, sobald eine gewisse binäre quadratische Form in  $\xi$  und  $\eta$ , deren Koeffizienten von  $a, b, p, q, r$  abhängen, indefinit und irreduzibel ist und den Wert  $\pm 8r^3$  annimmt, also unendlich oft annimmt. Die einfachsten Zahlenverhältnisse entstehen, wenn  $r = 3$  wird. Da man über  $c$  noch verfügen kann, so kann man  $p, q$  und eins der unendlich vielen Wertepaare  $\xi, \eta$  vorgeben und erhält eine Bedingung für  $a$  und  $b$ . So ergeben sich mit  $p = q = \xi = 1$ ,  $\eta = -1$  die Gleichungstypen (1) mit  $a = 6\lambda^2 + 6\lambda + 1$ ,  $b = 6\lambda^2 - 6\lambda + 1$ ,  $c = 7 - 12\lambda^2$  und mit  $a = 6\lambda^2 + 6\lambda - 1$ ,  $b = 6\lambda^2 - 6\lambda - 1$ ,  $c = 11 - 12\lambda^2$ .

Weber (Berlin).



**Dyer, P. S.:** A solution of  $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ . J. London Math. Soc. 18, 2—4 (1943).

Verf. leitet die von A. Gérardin, L'Intermédiaire des Mathématiciens 24, 51 (1917) gegebene Lösung der Titelgleichung in ganzen Zahlen auf einfache Weise ab. *Holzer*.

**Ljunggren, Wilhelm:** Über die Gleichung  $(Mx^2 - N)^2 = My^2 - N$ . Norske Vid. Selsk., Forh. 15, 67—70 (1943).

Verf. beweist, daß im Falle  $M = N(N + 1)$ , wo  $N$  eine natürliche Zahl ist, die Titelgleichung außer  $x = 0$ ,  $y = 1$ ;  $x = 2$ ,  $y = 4N + 1$  keine Lösung in nicht-negativen ganzen Zahlen  $x$ ,  $y$  hat. *Holzer* (Graz).

**Ljunggren, Wilhelm:** A theorem of diophantine equations of the fourth degree. Avh. Norske Vid.-Akad., Oslo 1943, 1—13 (Nr 9).

Die Gleichungen

$$(1) \quad ab_1^2 x^4 - cb_2^2 y^4 - dx^2 y^2 = \pm 1, \quad (2) \quad a^3 b_1^2 x^4 - c^3 b_2^2 y^4 + acd x^2 y^2 = \pm 1$$

haben höchstens eine Lösung in positiven ganzen rationalen Zahlen  $x$ ,  $y$ . Dabei sind alle Beiwerte ganz rational,  $a, b_1, b_2, c$  positiv,  $d \neq 0$ ,  $a$  und  $c$  quadratfrei. Dies wird bewiesen, indem gezeigt wird, daß der Körper  $k(\sqrt{a}, \sqrt{-c}, \theta)$ ,  $\theta = \sqrt{d + 2b\sqrt{-ac}}$  höchstens eine Einheit von der Gestalt  $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c} + (s + t\sqrt{-ac})\theta$ ,  $s + t = 0$ ,  $s + t \neq 0$  mit  $p, q, s, t$  ganz rational besitzt. *Hofreiter* (Braunschweig).

**Ljunggren, Wilhelm:** Über die Gleichungen  $1 + Dx^2 = 2y^n$  und  $1 + Dx^2 = 4y^n$ . Norske Vid. Selsk., Forh. 15, 115—118 (1943).

In den beiden Gleichungen des Titels seien alle Größen natürliche Zahlen, und zwar  $y, n$  ungerade und  $> 1$ , bei der ersten Gleichung  $D \equiv 1 \pmod{4}$ , bei der zweiten  $D \equiv 3 \pmod{4}$ . Verf. zeigt, daß dann die Gleichungen unmöglich sind, wenn die Klassenzahl im quadratischen Zahlkörper  $K(\sqrt{-D})$ , wo  $K$  der rationale Zahlkörper ist, durch  $n$  nicht teilbar ist. *Holzer* (Graz).

**Davenport, H.:** Note on sums of fourth powers. J. London Math. Soc. 16, 3—4 (1941).

Nach Wright [J. London Math. Soc. 9, 267—272 (1934); dies. Zbl. 10, 103] ist jede ganze Zahl als Summe von 12 Summanden der Gestalt  $\pm x^4$  mit ganzen  $x$  darstellbar. Verf. zeigt, daß 11 Summanden genügen. Es kommt natürlich nur auf die durch 16 nicht teilbaren Zahlen  $n$  an. Ist  $n \not\equiv 0 \pmod{8}$ , so beruht der Beweis darauf, daß  $n - 12$  in eine derjenigen Restklassen mod 24 fällt, die im Restklassenring die Gestalt  $\pm x_1^4 \pm x_2^4 \pm x_3^4$  haben,  $24x + 12$  aber identisch in  $x$  aus 8 Gliedern zusammengesetzt werden kann, die bis aufs Vorzeichen Biquadrate linearer Polynome sind. Ist hingegen  $n \equiv 8 \pmod{16}$ , so wird eine Identität benutzt, die aus 8 ebensolchen biquadratischen Gliedern das lineare Polynom  $16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 647x + 1165573$  zusammensetzt. Dieses Polynom erhält für passendes  $x$  in der Tat die Gestalt  $n \mp x_1^4 \mp x_2^4 \mp x_3^4$ , sogar speziell mit lauter Minuszeichen; das ergibt sich rasch aus dem Hilfssatz, daß im Restklassenring nach einer Primzahl  $\equiv 3 \pmod{4}$  jedes Element die Summe zweier Biquadrate ist.

*Weber* (Berlin).

**Hunter, W.:** The representation of numbers by sums of fourth powers. J. Lond. Math. Soc. 16, 177—179 (1941).

Verf. zeigt, daß sich jede ganze Zahl  $n$  in der Gestalt (1)  $n = \pm x_1^4 \pm x_2^4 \pm \dots \pm x_s^4$  mit  $s = 10$  darstellen läßt (mit ganzen  $x_i$  und mit geeigneten Vorzeichen), und zwar auf unendlich viele Arten. Beweisgang: I. Zu jedem  $n \not\equiv 0 \pmod{8}$  lassen sich ganze Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  und geeignete Vorzeichen finden, so daß die Zahl  $n \pm x_1^4 \pm x_2^4 \pm x_3^4$  einer der vier Restklassen  $\pm 4, \pm 14 \pmod{48}$  angehört. II. Es werden Identitäten aufgeschrieben, die zeigen, daß sich jede zu einer der erwähnten Restklassen gehörige Zahl in der Gestalt (1) mit  $s = 7$  schreiben läßt. III. Es wird eine von einem Parameter abhängige Identität abgeleitet, die für jedes  $n \equiv 0 \pmod{8}$  unendlich viele Darstellungen (1) mit  $s = 10$  liefert. Ist also  $v(4)$  die kleinste Zahl  $s$ , für welches (1) für jedes ganze  $n$



lösbar ist, so ist  $v(4) \leq 10$ . Das Beispiel  $n = 24$  zeigt  $v(4) \geq 9$ . Verf. bemerkt, daß bisher  $8 \leq v(4) \leq 11$  bekannt war (vgl. Wright, dies. Zbl. **10**, 103 und H. Davenport, vorsteh. Referat). Jarník (Prag).

**Ijzeren, J. van:** Elementare Eigenschaften der Partitionen natürlicher Zahlen. *Mathematica*, Zutphen B **12**, 115—118 (1944) [Holländisch].

Der Verf. beschäftigt sich mit den Zerlegungen einer natürlichen Zahl  $n$  in eine Summe von natürlichen Zahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Die Anzahl dieser Zerlegungen wird bekanntlich mit  $p(n)$  bezeichnet. Es handelt sich um die Berechnung von  $p(n)$ . Zu diesem Zwecke teilt der Verf. die Zerlegungen in vier Klassen. Er definiert: 1. Es sei  $p\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$  die Anzahl der Zerlegungen von  $n$  mit  $k$  als größter Zahl. 2.  $p'\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$  die Anzahl der Zerlegungen mit  $k$  Summanden. 3.  $p\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$  die Anzahl, für die  $k$  die kleinste Zahl ist, 4.  $p'\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$  die Anzahl der Zerlegungen, bei denen die größte Zahl  $k$ mal vorkommt. Es wird gezeigt:

$$\begin{aligned} p\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right) &= p'\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right), & p\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] &= p'\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right], \\ p\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right) &= p\left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix}\right) + p\left(\begin{smallmatrix} n-k \\ k \end{smallmatrix}\right), & p\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] &= p\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix}\right] + p\left[\begin{smallmatrix} n-k \\ k \end{smallmatrix}\right], \\ \sum_{i=1}^n p\left(\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right) &= p(n), & p\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] &= p(n). \end{aligned}$$

E. Hlawka (Wien).

**Selmer, Ernst S.:** Eine numerische Untersuchung über die Darstellung der natürlichen Zahlen als Summe einer Primzahl und einer Quadratzahl. *Arch. Math. og Naturvid.* B **47**, Nr 2, 1—19 (1943).

Durch Tabellenrechnungen und einige wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen kommt Verf. zur Vermutung, daß alle Zahlen  $> 21679$ , die nicht Quadrate sind, sich als Summe eines Quadrats und einer Primzahl darstellen lassen. Holzer.

**Benkert, Curt Ragnar:** Eine Variante des Siebes des Eratosthenes. *Ark. Mat. Astron. Fys.* **29B**, Nr 13, 1—5 (1943) [Schwedisch].

Es seien z. B. diejenigen natürlichen Zahlen  $\mu$  gesucht, für die  $12\mu - 1$  eine Primzahl ist. Eine etwaige echte Zerlegung der Zahl  $12\mu - 1$  in zwei ganze positive Faktoren muß bis auf deren Reihenfolge die Gestalt  $(12\alpha - 1)(12\beta + 1)$  oder  $(12\alpha - 5)(12\beta - 7)$  mit ganzen, positiven  $\alpha$  und  $\beta$  haben. Im ersten Falle wird  $\mu = 12\alpha\beta + \alpha - \beta$ , im zweiten Falle  $\mu = 12\alpha\beta - 7\alpha - 5\beta + 3$ . Dementsprechend scheide man die Zahlen  $\mu$  von der einen oder andern Gestalt erst für  $\alpha = 1$  und alle  $\beta \geq 1$ , dann für  $\alpha = 2$  und alle  $\beta \geq 1$  usw. aus. Jeweils fällt eine arithmetische Reihe mit der Differenz  $12\alpha - 1$  bzw.  $12\alpha - 5$  weg. Stellt man die ausgeschiedenen Zahlen in zwei Tafeln mit doppeltem Eingang zusammen, so sind die in diesen fehlenden natürlichen Zahlen  $\mu$  gerade die gesuchten. Entsprechend erhält man die Primzahlen anderer Restklassen. Weber (Berlin).

**Lintę, Ion:** Sur la distribution des nombres premiers. *Bull. Sect. Sci. Acad. Roum.* **26**, 83—88 (1943).

Bezeichnet  $I_{A \rightarrow B} [2.3.5 \dots (\sqrt{B})]$  die Anzahl der zur Zahl in  $[\ ]$  teilerfremden Zahlen aus dem Spielraum zwischen  $A$  und  $B$ , so ist dies zugleich die Anzahl der Primzahlen darin, wenn  $A \geq (\sqrt{B})$ , größte ganze Zahl in  $\sqrt{B}$ , ist. Unter Hinweis darauf, daß die Eigenschaften solcher Symbole in *Gaz. Matematica* **47**, 117—122, 158 bis 160 (1941) veröffentlicht worden sind, folgert Verf.: Zwischen  $n$  ( $n+1$ ) und  $(n+1)^2$  liegt stets eine Primzahl; zwischen  $n$  und  $1,618n$  liegt stets eine Primzahl; zwischen  $A$  und  $B$  liegen nicht mehr Primzahlen als zwischen  $KA$  und  $KB$  ( $K > 1$ ); und einige ähnliche Aussagen. L. Schrutka (Wien).



**Rohringer, Erhard:** Über Primzahlen  $p$ , für die auch  $ap + b$  wieder Primzahlen sind. Wien: Diss. 1942.

Es werden Primzahlen  $p$  betrachtet, für die auch  $a_i p + b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wieder Primzahlen sind. Ferner sei  $\pi(\xi)$  die Anzahl dieser Primzahlen zwischen 1 und  $\xi$ . Dann ist

$$(1) \quad \pi(\xi) < \frac{\alpha \xi (\log \log \xi)^n}{(\log \xi)^n},$$

wie rein arithmetisch mit Hilfe von  $n$ -fach reduzierten Restsystemen gezeigt wird.

Aus (1) folgt leicht die Konvergenz der Reziprokenreihe  $\sum \frac{1}{p}$ , wobei die  $p$  die obigen Primzahlen durchlaufen. Als Näherungsfunktionen für  $\pi(\xi)$  können gewählt werden:

$$1) \frac{\alpha \cdot \xi}{(\log \xi)^n}, \quad 2) \alpha \int_2^{\xi} \frac{du}{(\log u)^n}, \quad 3) \alpha \int_2^{\pi_n^{-1}(\xi)} \frac{du}{\log u},$$

wobei  $\pi_n(\xi)$  die Anzahl der Primzahlsscharen nach einer Reduktionsmatrix  $R$  mit einem  $\alpha = 1$  und dem Grade  $n$  sei. An Hand von mehreren Tafeln sieht man, daß diese Funktionen und zwar besonders die dritte beim Grade 2 den Werten von  $\pi(\xi)$  außerordentlich nahekommen.

*Hofreiter* (Braunschweig).

**Selberg, Atle:** On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes. Arch. Math. og Naturvid. B 47, Nr 6, 1—19 (1943).

Es werden Aussagen gemacht über  $\Phi(x)$  in  $\pi[x + \Phi(x)] - \pi(x)$ , wo  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen ist, die nicht größer als  $x$  sind. Wenn  $\Phi(x) \rightarrow \infty$  und  $x^{-1}\Phi(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ , dann wird das Intervall  $(x, x + \Phi(x))$  „klein“ genannt. Es wird bewiesen, Satz 4: Es sei  $\Phi(x) > 0$  wachsend,  $x^{-1}\Phi(x)$  abnehmend für  $x > 0$ ; sei ferner  $x^{-1}\Phi(x) \rightarrow 0$  und  $\lim (\lg x)^{-1} \lg \Phi(x) > 19/77$  für  $x \rightarrow \infty$ . Dann ist für fast alle  $x > 0$

$$\pi(x + \Phi(x)) - \pi(x) \sim (\lg x)^{-1} \Phi(x).$$

Ferner gelingt es Verf. in zwei Resultaten von Cramér über die Größenordnung der Differenz  $p_n - p_{n-1}$  zweier aufeinanderfolgender Primzahlen die Schranken zu verbessern. Z. B. Satz 3: Wird die Riemannsche Hypothese als bewiesen vorausgesetzt, dann ist

$$\sum_{p_n \leq x} p_n^{-1} (p_n - p_{n-1})^2 = O(\lg^3 x).$$

Die Beweise, ausgenommen für Satz 4, beruhen auf vier Hilfssätzen, die Abschätzungen geben im Streifen  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  unter Voraussetzung der Gültigkeit der Riemannschen Hypothese. Sätze 1 und 4 haben die Eigentümlichkeit, daß die asymptotische Aussage gemacht wird nur für „fast alle“  $x > 0$ .

*Kienast* (Zürich).

**Davenport, H.:** Note on the product of three homogeneous linear forms. J. Lond. Math. Soc. 16, 98—101 (1941).

Sind  $L_1, L_2, L_3$  Linearformen in den Veränderlichen  $u, v, w$  mit der Determinante 1 und ist  $M$  die untere Grenze von  $|L_1 L_2 L_3|$  für alle ganzzahligen von 0, 0, 0 verschiedenen  $u, v, w$ , so gilt:  $M \leq \frac{1}{7}$ . Hiefür wird hier ein kurzer Beweis gegeben.

*Hofreiter*.

**Mordell, L. J.:** The product of homogenous linear forms. J. London Math. Soc. 16, 4—12 (1941).

Es sind  $L_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $n$  Linearformen in  $x_1, \dots, x_n$  mit der Determinante 1. Es handelt sich darum, eine Konstante  $k_n$  unabhängig von den Koeffizienten in den  $L_i$  so zu bestimmen, daß

$$\left| \prod_{i=1}^n L_i \right| \leq k_n$$

in ganzen  $x_i$ , wo nicht alle  $x_i$  verschwinden, lösbar ist. Minkowski zeigte, daß

$k_n = \frac{n!}{n^n}$  geeignet ist. Verschärft wurde dies z. B. von Jarnik mit  $k_n = 2^{-\frac{n-1}{2}} + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ )

(dies. Zbl. 26, 204). Weiter ist  $k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $k_3 = \frac{1}{7}$ ,  $k_4 = \frac{3}{20\sqrt{5}}$  (vgl. nachst. Besprechung)



bekannt. Mordell benutzt nun das Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen von Mahler (dies. Zbl. 21, 104), um Schranken für  $k_n$  im Falle  $n=3, 4, 5$  zu erhalten, und zwar  $k_3 = \frac{4}{27}$ ,  $k_4 = \left[4 - \frac{2}{3} \left(3 - 2 \left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^3\right]^{-2}$ ,  $k_5 = \frac{1}{32,4} \dots$ , E. Hlawka.

**Žilinskas, G.:** On the product of four homogenous linear forms. J. London Math. Soc. 16, 27—37 (1941).

Der Verf. zeigt: Sind  $L_i (i=1, \dots, 4)$  vier Linearformen in  $x_1, \dots, x_4$  mit der Determinante 1, so gibt es ganze  $x_i$ , die nicht alle verschwinden, so daß  $|L_1 L_2 L_3 L_4| \leq \frac{3}{20 \sqrt{5}}$ . Es wird die Methode benutzt, die Davenport bei dem Produkt von drei Linearformen angewendet hat (dies. Zbl. 18, 295). E. Hlawka.

**Weyl, Hermann:** On geometry of numbers. Proc. London Math. Soc., II. s. 47, 268—289 (1942).

Der Verf. leitet zunächst den Fundamentalsatz von Minkowski und den Satz über die Minima  $M_i (i=1, \dots, n)$  eines konvexen Körpers mit der Eichdistanz  $F(x)$ :  $M_1 \dots M_n I \leq 2^n (I\text{-Volumen von } F(x) \leq 1)$  mit Verwendung analytischer Methoden (dies. Zbl. 12, 395) her. Er entwickelt sodann eine Reduktionstheorie: Wir definieren die neuen Minima  $N_i$  so:

$$F_i(x_1, \dots, x_n) \geq F(\delta_1^k, \dots, \delta_n^k) = N_k,$$

wo  $x_1, \dots, x_n$  ganz und  $x_k, \dots, x_n$  keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen. Es gilt nun  $N_i \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{i-2} M_i$ . Diese wichtige Ungleichung wurde für quadratische Formen bereits von Remak bewiesen (dies. Zbl. 19, 105). Zum Schluß geht der Verf. noch auf die Reduktionstheorie der quadratischen Formen genauer ein. E. Hlawka.

**Selberg, Atle:** On the zeros of the zeta-function of Riemann. Norske Vid. Selsk. Forh. 15, 59—62 (1943).

$N_0(T)$  sei die Anzahl der Nullstellen von  $\zeta(\frac{1}{2} + it)$  für  $0 < t < T$ ; Hardy und Littlewood haben bewiesen, daß es zwei positive Konstanten  $A$  und  $T_0$  gibt, so daß

$$N_0(T) > AT \quad \text{für } T > T_0.$$

Verf. skizziert einen Beweis für seinen Satz 1:

$$N_0(T) > AT \lg T \quad \text{für } T > T_0.$$

Er gibt weiter an: Satz 2: Wenn  $\Phi(t) > 0$  mit  $t$  nach  $\infty$  wächst, dann liegen von den Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion in dem Bereich

$$\left| \sigma - \frac{1}{2} \right| < \Phi(t) (\lg t)^{-1}, \quad t > 3$$

alle mit Ausnahme eines zu Null herabsinkenden Bruchteils. Ausführliche Beweise dieser und allgemeiner Resultate werden später veröffentlicht werden. Kienast.

**Bruijn, N. G. de:** Fastperiodische multiplikative Funktionen. Nieuw Arch. Wiskd. II. s. 22, 81—95 (1943).

Es sei  $f(n)$  eine multiplikative zahlentheoretische Funktion ( $f(1) = 1$ ,  $f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$ , wenn  $(n_1, n_2) = 1$ ). Der Verf. zeigt, daß  $f(n)$  dann und nur dann fastperiodisch im Bohrschen Sinne ist, wenn es eine natürliche Zahl  $N$  und einen Restcharakter  $\chi \bmod N$  gibt, so daß 1. für alle  $p|N$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p^n) = 0$ , 2. für alle  $p \nmid N$   $\lim_{n \rightarrow \infty} G(p^n)$  vorhanden und  $\neq 0$  ( $G(m) = \chi(m) f(m)$ ) und 3.  $\sum b(p)$  konvergiert, wo  $b(p) = \inf_{n \rightarrow \infty} |G(p^n) - 1|$  ist. Jedes fastperiodische  $f(n)$  ist dann sogar grenzperiodisch. Der Verf. stellt analoge Bedingungen dafür auf, daß  $f(n)$  periodisch ist. Damit  $f(n)$  sogar vollständig multiplikativ ( $f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$  für alle  $n_1, n_2$ ) und fastperiodisch ist, gelten folgende schärfere notwendige und hinreichende Bedingungen: Es muß ein  $N$  und einen Charakter  $\chi \bmod N$  geben, so daß  $|f(p)| < 1$  wenn  $p|N$  und  $f(p) = \chi(p)$  wenn  $(p, N) = 1$ . Ist  $f(n)$  stark multiplikativ ( $f(p^k) = f(p)$  für alle  $k$  und  $p$ ), so ist notwendig und hinreichend für die Fastperiodizität die Konvergenz von  $\sum_p |f(p) - 1|$ . E. Hlawka (Wien).



## Analysis

### Allgemeines:

**Brun, Viggo:** Kritik an einigen mathematischen Symbolen. Norsk mat. Tidsskr. 25, 97—106 (1943) [Norwegisch].

Verf. stellt die Frage zur Diskussion, ob sich gewisse mathematische Symbole nicht durch zweckmäßigere ersetzen lassen, und macht, ohne die praktische Durchführbarkeit einer Umstellung entscheiden zu wollen, konkrete Vorschläge. Da man bei der Bezeichnung  $\int f(x) dx$  für das unbestimmte Integral gar nicht an den Grenzwert einer Summe zu denken pflegt, so regt Verf. an, das  $dx$  wegzulassen und kürzer  $f(x)$ , bei Vorhandensein weiterer Veränderlichen aber z. B.  $f(x, y)$  zu schreiben. Auch der Bezeichnung  $a \equiv b \pmod{m}$  wirft Verf. Umständlichkeit vor; er empfiehlt dafür die Schreibweise  $a = Qm + b$ , wobei  $Q$  auch verschiedene ganze Zahlen nebeneinander bedeuten darf und beim Rechnen wie eine Null behandelt wird. An dem Ausdruck  $f(x) = O(g(x))$  bemängelt Verf. die Gefahr, daß man  $g(x)$  für die wahre Größenordnung von  $f(x)$  hält und das  $O$  überdies, falls noch andere Veränderliche vorkommen, auf eine von diesen bezieht, und schlägt als Ersatz die Bezeichnung  $f(x) = (x) \cdot g(x)$  vor, wo  $(x)$  für große  $x$  beschränkt bleibt und seine Bedeutung auch ändern kann. Weber (Berlin).

● **Burklen, O. Th.:** Mathematische Formelsammlung. Vollst. umgearb. Neuausg. v. F. Ringleb. 4., verb. Aufl. (Samml. Göschens Bd. 51.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1943. 272 S. u. 37 Fig. geb. RM. 1.62.

Die Formelsammlung von Bürklen ist zum erstenmal 1896 erschienen. Nach Erschöpfung der dritten Auflage wurde sie 1928 in neuer Bearbeitung von F. Ringleb herausgegeben. Von dieser Neubearbeitung erschien 1931 eine zweite Auflage (angezeigt in dies. Zbl. 1, 259), 1936 eine dritte. Die vorliegende vierte Auflage stimmt in der Seitenzahl genau mit der dritten überein. Die behandelten Gebiete sind: Arithmetik und Kombinatorik (mit etwas Wahrscheinlichkeitsrechnung), Gleichungen, elementare Zahlentheorie, arithmetische und geometrische Reihen, Planimetrie, Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, mathematische Geographie und Astronomie, analytische Geometrie der Ebene und des Raumes in Verbindung mit Vektorrechnung, Differentialrechnung (mit Einschluß der unendlichen Reihen), Integralrechnung, Differentialgeometrie und Differentialgleichungen (kurz). L. Schrutka.

### Mengenlehre:

**Bruijn, N. G. de:** Gemeinschaftliche Repräsentantensysteme zweier Klasseneinteilungen einer Menge. Nieuw Arch. Wiskde. II. s. 22, 48—52 (1943) [Holländisch].

Wenn eine Menge  $\mathfrak{M}$  in zwei Weisen in Klassen eingeteilt wird:  $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{B}$ , so daß jede  $\mathfrak{A}$ -Klasse nur mit endlich vielen  $\mathfrak{B}$ -Klassen und jede  $\mathfrak{B}$ -Klasse nur mit endlich vielen  $\mathfrak{A}$ -Klassen Elemente gemeinsam hat, und zweitens keine Vereinigungsmenge von  $(\nu - 1)$   $\mathfrak{A}$ -Klassen  $\nu$   $\mathfrak{B}$ -Klassen umfaßt und keine Vereinigungsmenge von  $(\nu - 1)$   $\mathfrak{B}$ -Klassen  $\nu$   $\mathfrak{A}$ -Klassen umfaßt, dann gibt es ein gemeinsames Repräsentantensystem. Für den Fall, daß beide Klasseneinteilungen nur aus endlich vielen Klassen bestehen, wurde dieser Satz bereits von R. Rado, P. Hall und W. Maak bewiesen. van der Waerden (Leipzig).

**Denjoy, Arnaud:** Les permutations spéciales de la suite normale des entiers positifs. C. R. Acad. Sci., Paris 217, 121—124 (1943).

Ist  $n$  eine natürliche Zahl,  $h_1$  die größte ganze Zahl, so daß die Summe der ersten  $h_1$  natürlichen Zahlen  $\leq n$  ist, also

$$n = \frac{h_1(h_1 + 1)}{2} + j_1 \quad (0 \leq j_1 \leq h_1),$$

so setzen wir  $h_1 + 1 = k_1 + j_1$  und  $n = f_1(k_1 | j_1)$ ; fährt man ebenso mit  $j_1$  fort, so erhält man weiter  $n = f_p(k_1, k_2, \dots, k_p | j_p)$ , bis endlich  $j_p = 0$  wird. Es werden für



die Familien von endlichen Folgen natürlicher Zahlen  $(k_1, \dots, k_p)$  die Bedingungen dafür angeben, daß  $f_p(k_1, k_2, \dots, k_p | j_p)$  alle natürlichen Zahlen darstellt. Ordnet man hier die  $k_1, k_2, \dots, k_p, j_p$  lexikographisch, so erhält man durch die  $f_p(k_1, k_2, \dots, k_p | j_p)$  eine Permutation der natürlichen Zahlenreihe. Darstellung dieser Permutation (vgl. dies. Zbl. 26, 148) und ihr Ordnungstypus (vgl. dies. Zbl. 26, 301). *H. Hornich.*

**Randolph, John F.:** Some properties of sets of the Cantor type. J. London Math. Soc. **16**, 38—42 (1941).

Es sei eine Folge positiver Zahlen  $a_1 \geq a_2 \geq \dots$  mit  $\sum_1^\infty a_i = 1$  gegeben. Alle Zahlen  $x = \sum \varepsilon_i a_i$ , wo  $\varepsilon_i = 0$  oder  $= 1$  ist, bilden eine Zahlenmenge  $S$ , die vom Cantorschen Typus genannt wird (für  $a_n = 2 \cdot 3^{-n}$  ist  $S$  das bekannte Cantorsche

Diskontinuum). Es wird bewiesen: Die Bedingung  $a_n \leq 2 \sum_{n+1}^\infty a_i$ , für jedes  $n = 1, 2, \dots$ ,

ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Entfernungsmenge von  $S$ , d. i. die Menge der Zahlen  $|x - y|$  mit  $x \in S, y \in S$ , mit dem Einheitsintervall  $A_0$  identisch sei (Problem von M. Kac). Es sei nun  $C_\lambda = A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \dots$ , wobei man das Intervallsystem  $A_{n+1}$  dadurch bekommt, daß man von jedem Intervall  $I$  von  $A_n$  ein offenes und mit  $I$  konzentrisches Teilintervall von der Länge  $\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^n \cdot \lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$  wegnimmt.

Bedeutet  $T_\lambda$  das Cartesische Produkt  $C_\lambda \times C_\lambda$ , so gelten folgende Beziehungen:

$$L T_\lambda = G T_\lambda = \infty \quad \text{für} \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \quad L T_\lambda = G T_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} < \lambda < 1$$

$$3 \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \leq L T_{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}} < 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \leq G T_{\frac{1}{2}} \leq 2.$$

Dabei bedeutet  $L$  das Carathéodorysche und  $G$  das Gillespiesche lineare Maß (bei dem äußeren Gillespieschen Maß werden die halben Umfänge der überdeckenden Mengen anstatt ihrer Durchmesser angewendet). *J. Novák (Brünn).*

**Best, E.:** On sets of fractional dimensions. 3. Proc. London Math. Soc., II. s. **47**, 436—454 (1942).

Für  $2 < r$  und  $s < r$  bedeute  $E_{r,s}$  die Menge aller Zahlen  $x = \sum_1^\infty t_i r^{-i}$ , wo  $s \neq t_i < r$  ist und  $r, s, t_i$  nichtnegative ganze Zahlen sind. Das Hauptresultat der Arbeit lautet: Die Hausdorffsche Dimensionsfunktion [Math. Ann. **79**, 157—179 (1919)] der Menge  $E_{r,s}$  ist  $t^\alpha$  mit  $\alpha = \frac{\log(r-1)}{\lg r}$ . Es werden alle  $t^\alpha$ -Maße von  $E_{r,s}$  für  $r = 3$  und  $r = 4$  berechnet:  $mE_{3,0} = 0,647$ ,  $mE_{3,1} = 1$  (Cantorsches Diskontinuum),  $mE_{4,0} = 0,725$ ,  $mE_{4,1} = \frac{10^\alpha}{8} = 0,775$ . Weiter gilt allgemein  $mE_{r,0} = \left(\frac{r-2}{r-1}\right)^\alpha$ . Zum Unterschied von der Dimensionszahl  $\alpha$  hängt das  $t^\alpha$ -Maß  $m$  sowohl von  $r$  als auch von  $s$  ab. Für die 1. und 2. Mitteilung vgl. dies. Zbl. **23**, 305 und **27**, 205. *Novák (Brünn).*

## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

**Bödewadt, U. T.:** Zur Iteration reeller Funktionen. Math. Z. **49**, 497—516 (1944).

Läßt sich zu einer reellen Funktion  $f(x)$  eine Funktion  $\varphi(x)$  bestimmen, so daß  $1 + \varphi(x) = \varphi(f(x))$  (Abelsche Funktionalgleichung, A.F.) gilt, so folgt für die  $k$ -fach iterierten Funktionen  $f^{[k]}(x)$  die Relation  $k + \varphi(x) = \varphi(f^{[k]}(x))$  oder  $f^{[k]}(x) = \varphi^{-1}(k + \varphi(x))$ ; durch diese Formel werden auch für alle nichtganzzahligen  $k$  Funktionen  $f^{[k]}(x)$  definiert. Jede Funktion  $\varphi(x)$ , die der A.F. genügt, heißt Stufungsfunktion von  $f(x)$ . Sei  $f(x)$  im Intervall  $(a, b)$  eine monoton wachsende stetige Funktion, für welche  $f(x) > x$  gilt und wobei der Wertbereich von  $f(x)$  mit  $(a, b)$  ein Intervall gemein haben soll. Für diese Klasse von Funktionen  $f(x)$  werden nun monoton wachsende stetige Stufungsfunktionen  $\varphi(x)$  gebildet, und zwar eine Folge  $\varphi_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) solcher Funktionen, wo  $\varphi_n(x)$  stetige Ableitungen bis zur  $n$ -ten Ord-



nung hat; dies geschieht naturgemäß mit Hilfe der Bernoullischen Polynome. Ist  $f(x)$   $r$ -fach stetig differenzierbar, so lassen sich dabei die  $\varphi_n(x)$  bis  $n = r$  aufstellen und die mit  $\varphi_r(x)$  gebildeten Funktionen  $f^{[k]}(x)$  sind gleichfalls  $r$ -fach stetig differenzierbar. Schließlich werden Konvergenzsätze für unbeschränkt differenzierbare Funktionen  $f(x)$  abgeleitet und Bedingungen für die Stufungsfunktionen angegeben, damit die Funktionen  $f^{[k]}(x)$  vollmonoton sind. H. Hornich (Wien).

**Schärf, Henryk:** Über links- und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen. *Portugaliae Math.* **4**, 73—118 (1943).

Setzt man in der Summe

$$\sum_{i=0}^{r-1} f(\xi_i) [g(t_{i+1}) - g(t_i)], \quad (1)$$

wobei  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$  und  $f, g$  endlich, für  $\xi_i = t_i$  bzw.  $\xi_i = t_{i+1}$  und existieren die Grenzwerte von (1), die man wie bei der Definition des Riemann-Stieltjesischen Integrals bildet, so hat man nach Verf. das links- bzw. rechtsseitige  $RS$ -Integral,

in Zeichen  $\int_a^{(-)b} f dg$  bzw.  $\int_a^{(+ )b} f dg$ . Seitliche Stetigkeit und gleichmäßige seitliche Stetig-

keit von Funktionen, d. h. Stetigkeit nach mindestens einer Seite in jedem Punkt, werden eingeführt und damit einige Eigenschaften der Funktionen von beschränkter Schwankung bewiesen. Weiter werden abgeleitet und bewiesen Rechenregeln für die eingeführten Integrale, Existenzkriterien, Beziehungen zwischen diesen, dem Riemann- bzw. Lebesgue- bzw. Perron-Stieltjesschen Integral und mittleren Stieltjesschen Integral.

Die folgende nach Verf. allgemeine Regel der partiellen Integration für das Lebesgue-Stieltjessche Integral wird bewiesen: Sind  $f$  und  $g$  von beschränkter Schwankung in  $\langle a, b \rangle$ , so gilt

$$(LS) \int_a^b f dg + (LS) \int_a^b g df = fg \Big|_{a-0}^{b+0} + \sum_{a \leq x_i \leq b} \left[ \Delta f(x_i) \Delta g(x_i) - \Delta f(x_i) \Delta g(x_i) \right],$$

(die Summation erstreckt sich über sämtliche gemeinsamen Unstetigkeitspunkte

von  $f$  und  $g$ ,  $\Delta g(x) = g(x) - g(x-0)$ ;  $\Delta g(x) = g(x+0) - g(x)$ ). Eine entsprechende Regel wird für das Perron-Stieltjessche Integral ebenfalls gegeben. Zum Schluß bringt der Verf. zahlreiche Anwendungen seiner Integrale in der Versicherungsmathematik, die meistens die dort bestehende Doppelspurigkeit zwischen diskontinuierlichen und kontinuierlichen Methoden beseitigen, und zwar in Fällen, wo das gewöhnliche  $RS$ -Integral nicht existiert. Insbesondere erhält man durch diese Anwendungen neue Resultate über Funktionalgleichungen der Deckungsrücklagen und den Zusammenhang zwischen Rücklagenvariationen und Gewinnausdrücken. D. A. Kappos.

**Besicovitch, A. S.:** Remark on relative derivatives. *J. London Math. Soc.* **16**, 210—211 (1941).

Eine Vereinfachung des Beweises, den E. Gourin [*Fund. Math.* **32**, 97—102 (1939), dies. Zbl. **21**, 116] gegeben hat für den bekannten Satz: Eine stetige Funktion  $y(t)$  ist gleich einer Konstanten im Intervall  $(a, b)$ , wenn die relative Ableitung von  $y(t)$  in bezug auf eine andere stetige Funktion  $x(t)$  überall in  $(a, b)$  verschwindet.

D. A. Kappos (Leipzig).

## Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

**Dickinson, D. R.:** On Tchebycheff polynomials. **3.** *J. London Math. Soc.* **17**, 211 bis 217 (1942).

Teil I erschien in *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **10**, 277—282 (1939); vgl. dies. Zbl. **22**, 217, Teil II ebenda **12**, 184—192 (1941). Die in  $a \leq x \leq b$  stetigen Funktionen  $\varphi_\nu(x)$ ,  $\nu = 0, \dots, n$ , bilden ein T-System  $n$ -ter Ordnung, wenn jedes sog. T-Poly-



nom des Systems, d. h. jede Linearkombination  $P(x) = \sum_{r=0}^n a_r \varphi_r(x)$  mit reellen, nicht sämtlich verschwindenden  $a_r$ , in  $(a, b)$  höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen hat. Zu gegebenem T-System werden die Punktfolgen  $W_r$ ,  $r = 2, 3, \dots$  dadurch erklärt, daß  $\bar{x} \in W_r$ ,  $a \leq \bar{x} \leq b$ , ist, wenn es ein  $P_n(x)$  gibt, das in  $\bar{x}$  eine schwache Nullstelle  $r$ -ter Ordnung hat. Verf. zeigt, daß  $W_r$  endlich oder abzählbar unendlich ist und führt den Beweis für  $r = 2, 3$  aus. Er verläuft für  $r = 2$  folgendermaßen: Es sei  $c = \frac{1}{2}(a + b)$ ;  $y \in W_2$ ,  $a < y < c$ . Man nehme in  $(c, b)$   $n - 2$  beliebige Punkte  $x_1, \dots, x_{n-2}$  und konstruiere ein T-Polynom  $P_y(x)$  unseres Systems mit den einfachen Nullstellen  $c, y, x_1, \dots, x_{n-2}$ , das in  $x = a$  den Wert 1 hat, sowie ein zweites solches Polynom  $Q_y(x)$ , das in  $a, y, x_1, \dots, x_{n-2}$  einfach verschwindet und in  $c$  den Wert 1 hat; ist dann

$$\underline{\lambda}(y) = - \lim_{x \rightarrow y+0} \frac{P_y(x)}{Q_y(x)}, \quad \bar{\lambda}(x) = - \lim_{x \rightarrow y-0} \frac{P_y(x)}{Q_y(x)},$$

so verschärft sich die früher bewiesene Ungleichung  $0 < \underline{\lambda}(y) \leq \bar{\lambda}(y) < \infty$  wegen  $y \in W_2$  zu:  $\underline{\lambda}(y) < \bar{\lambda}(y)$ . Mithin wird jedem Punkt  $y$  der Menge  $W_2 \cdot (a, c)$  ein Intervall  $(\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y))$  zugeordnet; da diese Intervalle als nicht übereinander greifend nachgewiesen werden, muß ihre Menge endlich oder abzählbar unendlich sein. Auf dem gleichen Gedanken beruht der Beweis für  $W_3$ ; er benutzt ein Lemma: Es sei  $\bar{x} \notin W_2$  und  $P(x)$  ein T-Polynom unseres Systems, das in  $\bar{x}$  Zeichen wechselt; es gebe ein T-Polynom  $Q(x)$ , das in  $\bar{x}$  eine (starke) doppelte Nullstelle besitzt und für das  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} P(x)/Q(x) = 0$  ist, dann hat  $P(x)$  in  $\bar{x}$  eine (starke) dreifache Nullstelle. Zum Schluß beweist Verf., daß jeder Punkt von  $W_2$  ein solcher von  $W_3$  ist. *Harald Geppert.*

**Combes, Bernard:** Sur les développements en série du type de Taylor. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 281—283 (1943).

In einem  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raume  $E_n$  sei eine Kurve  $(C)$  durch die Relationen  $X_i = \varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) definiert. Die Menge der Schwerpunkte der Massen  $\geq 0$ , die auf  $(C)$  nach den Wahrscheinlichkeitsdichten  $f(x)$  verteilt sind, steht in einer linearen Beziehung zu dem Funktionalraume  $\Delta$ , dessen Punkte die Funktionen  $f(x)$  sind. Teilen wir  $(a, b)$  in  $N$  gleiche Intervalle und ersetzen wir  $f(x)$  im  $i$ -ten Teilintervalle (mit dem Mittelpunkt  $c_i$ ) durch  $m_i = f(c_i)$ , so ist durch die linearen Bedingungen:  $\sum m_i = 1$ ,  $m_i \geq 0$ ,  $F_j(m_1, m_2, \dots, m_N) \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $j = 1, 2, \dots, p$ ) ein konvexes Polyeder in  $E_N$  definiert, dessen Eckpunkte beim Übergang  $N \rightarrow \infty$  in die „Eckpunkte“ (die sog. Limesfunktionen) des Raumes  $\Delta$  übergehen. Seien nun  $y_m(x, t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  und  $u_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, \alpha_m$ ) Limesfunktionen der Menge der Funktionen, die die ersten  $m$  Bedingungen  $F_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, \dots$ ) befriedigen. Sind  $f(x)$  und  $y_m(x, t)$  für  $a' \leq x \leq b'$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  stetig, so gilt für  $a' \leq x \leq b'$ :

(1)  $f(x) = \mu_1 u_1(x) + \dots + \mu_{\alpha_m} u_{\alpha_m}(x) + \int_{t_0}^{t_1} y_m(x, t) dM(t)$ , wo  $\mu_k$  nichtnegative Zahlen bedeuten und  $M(t)$  eine nichtfallende Funktion ist, so daß  $\sum_1^{\alpha_m} \mu_k + M(t_1) - M(t_0) = 1$  ist. Ein Beispiel  $F_t = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h^{t+1}} \Delta^{t+1} f \right)$  zeigt, daß (1) die Taylorsche Formel ist. Wenn also gleichmäßig  $y_m(x, t) \rightarrow 0$  und  $\mu_k$  unabhängig von  $m$  sind, so bekommt man eine Reihe  $f(x) = \sum_1^{\infty} \mu_k u_k(x)$ , welche vom Taylorschen Typus genannt werden kann.

*J. Novák (Brünn).*

**Roure, Henri:** Sur une généralisation de la série de Lagrange, avec application à l'astronomie. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 332—333 (1943).

Es seien die  $m$  Funktionen  $z_i$  durch die  $m$  Gleichungen

$$z_i = x_i + t_i f_i(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

erklärt, wobei die  $f_i(z_i)$  holomorphe Funktionen von  $z_i$ , die  $x_i$   $m$  verschiedene Ver-



änderliche und die  $t_i$  Parameter sind. Die Maclaurinsche Formel ergibt dann für die Funktion  $F(z_1, z_2, \dots, z_m)$  die Entwicklung:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum \frac{t_i^a}{a!} \frac{\partial^{a-1}}{\partial x_i^{a-1}} \left[ \frac{\partial F}{\partial x_i} (f_i(x_i)) \right] \\ + \sum \sum \dots \frac{t_i^a t_j^b}{a! b!} \dots \frac{\partial^{\mu-n}}{\partial x_i^{a-1} \partial x_j^{b-1} \dots} \left[ \frac{\partial^n F}{\partial x_i \partial x_j \dots} (f_i(x_i))^a (f_j(x_j))^b \dots \right],$$

wo  $\mu = a + b + \dots$  und  $n$  die Anzahl der Veränderlichen ist, die differenziert werden. Hat man z. B. zwei Keplergleichungen  $u = M + e \sin u$ ,  $u' = M' + e' \sin u'$ , so hat man

$$F(u, u') = F(M, M') + \sum \frac{e^a}{a!} \frac{\partial^{a-1}}{\partial M^{a-1}} \left( \frac{\partial F}{\partial M} \sin^a M \right) \\ + \sum \frac{e^b}{b!} \frac{\partial^{b-1}}{\partial M'^{b-1}} \left( \frac{\partial F}{\partial M'} \sin^b M' \right) + \sum \sum \frac{e^a e^b}{a! b!} \frac{\partial^{a+b-2}}{\partial M^{a-1} \partial M'^{b-1}} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial M \partial M'} \sin^a M \sin^b M' \right),$$

woraus man z. B. die Störungsfunktion in eine trigonometrische Reihe nach den Vielfachen von  $M, M'$  entwickeln kann. Volk (Würzburg).

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

Silberstein, Ludwik: *Differentially cyclical sets of functions. An extension of the concept of hyperbolic functions.* Philos. Mag., VII. s. 33, 457—461 (1942).

Verf. befaßt sich mit dem Differentialsystem:

$$(1) \quad f'_1(x) = f_2(x), \quad f'_2(x) = f_3(x), \dots \quad f'_n(x) = f_1(x)$$

unter den Anfangsbedingungen

$$f_1(0) = 1, \quad f'_1(0) = f''_1(0) = \dots = f^{(n-1)}_1(0) = 0.$$

Dann ist die Zirkulante von  $f_1, \dots, f_n$  konstant gleich 1. Weiter fragt Verf. nach dem Additionstheorem dieser Funktionen; es lautet für  $n = 3$ :

$$f_1(x+y) = f_1(x) f_1(y) + f_2(x) f_3(y) + f_3(x) f_2(y),$$

$$f_2(x+y) = f_3(x) f_3(y) + f_1(x) f_2(y) + f_2(x) f_1(y),$$

$$f_3(x+y) = f_2(x) f_2(y) + f_3(x) f_1(y) + f_1(x) f_3(y)$$

und liefert für  $x = -y$  die Übergangsformeln zu negativem Argument. Für allgemeines  $n$  bleibt die Frage offen. Harald Geppert (Berlin).

### Funktionentheorie:

Montel, Paul: *Sur les différences divisées.* C. R. Acad. Sci., Paris 215, 193—195 (1942).

$f(z)$  sei eine im Bereiche  $D$  reguläre Funktion.  $\Sigma_1$  bezeichne den Wertebereich von  $f(z)$ , wenn  $z$  den Bereich  $D$  durchläuft. Im Falle, daß  $D$  konvex ist, gilt bekanntlich nach Weierstrass

$$(1) \quad \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = Z_1,$$

wobei  $z_1, z_2$  zwei Punkte aus  $D$  sind und  $Z_1$  der konvexen Hülle von  $\Sigma_1$  angehört. Ist entweder  $\Sigma_1$  konvex oder bleibt  $f''(z)$  in  $D$  von Null verschieden und sind die beiden Stellen  $z_1$  und  $z_2$  hinreichend nahe benachbart, so hat Verf. gezeigt [J. Math. pures appl., IX. s. 16, 219—231 (1937); dies. Zbl. 17, 107], daß

$$(2) \quad \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = f'(\alpha)$$

ist, worin  $\alpha$  eine passende Stelle aus  $D$  bedeutet. — Im Reellen ist die Umkehrung von (2) nicht immer möglich. Nach Pompeiu (dies. Zbl. 26, 8) lassen sich aber zu einem vorgegebenen  $\alpha$  aus  $D$  immer Stellen  $z_1$  und  $z_2$  aus  $D$  finden, welche (2) befriedigen, sobald man nur in der Nachbarschaft von  $\alpha$  bleibt. Für beliebige Bereiche  $D$  hat

Verf. nun folgende Sätze erhalten: 1. Auf jeder in  $D$  verlaufenden geschlossenen Kurve  $C$ , welche  $\alpha$  umschließt, gibt es zwei die Gleichung (2) befriedigende Punkte  $z_1$  und  $z_2$ . 2. Der Differenzenquotient

$$(3) \quad \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$$

besitzt für die Punkte einer in  $D$  verlaufenden geschlossenen Kurve  $C$  denselben Wertevorrat wie für die Punkte des von  $C$  berandeten Bereiches (dies. Zbl. 5, 290).

3. Die Umkehrung von (1) ist nicht immer möglich. Der Wertebereich des Differenzenquotienten (3) enthält zwar  $\Sigma_1$ , ist aber im allgemeinen nur ein Teil von  $S$ . — Verf. führt dann noch die entsprechenden Sätze für den aus zwei Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  gebildeten Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{g(z_2) - g(z_1)}$$

und für die höheren Differenzenquotienten einer Funktion an. Beweise fehlen.

Lammel (Prag).

**San Juan, R.:** Sur le problème de Watson dans la théorie des séries asymptotiques et solution d'un problème de Carleman de la théorie des fonctions quasi-analytiques. Acta math. 75, 247—254 (1943).

Nach Carleman ist die Divergenz des Integrals  $\int_1^\infty \lg \sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2} \cdot \frac{dx}{x^2}$  eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Poincaréschen Schranken

$$A_n \geq \left| \frac{F(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right| \quad \text{bezüglich des Kreises } |1 - z| < 1, \text{ damit die Funktion } F(x)$$

durch die asymptotische Entwicklung  $\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu z^\nu$  eindeutig bestimmt sei. Verf. stellt sich die Frage, ob zwei Funktionen  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  mit gleicher asymptotischer Entwicklung auch dann identisch sind, wenn ihre Poincaréschen Schranken  $A'_n$  und  $A''_n$  zwar verschieden sind (keine ist Majorante der andern), aber je der Carlemanschen Bedingung genügen. Diese Frage ist zu verneinen. Mittels der Laplace-Transformation

$f(x) = \int_0^\infty A(t) e^{-tx} dt$  ergibt sich ein entsprechendes Resultat für quasianalytische Funktionen.

Pfluger (Zürich).

**Rogosinski, Werner:** On the coefficients of subordinate functions. Proc. London Math. Soc. II. s. 48, 48—82 (1943).

Es sei  $W = F(z)$  meromorph in dem einfach zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{D}$  auf der  $z$ -Kugel und  $\mathfrak{G}(F)$  der Teil der Riemannschen Fläche von  $F(z)$  über der  $W$ -Kugel, welcher der Abbildung von  $\mathfrak{D}$  durch  $F(z)$  zugeordnet ist. Ebenso sei  $f(z)$  meromorph in  $\mathfrak{D}$ . Man nennt nun  $f(z)$  untergeordnet  $F(z)$  in bezug auf  $z_0$  ( $z_0$  in  $\mathfrak{D}$ ), wenn  $W_0 = f(z_0) = F(z_0)$  und  $\mathfrak{G}(f)$  über  $\mathfrak{G}(F)$  liegt (nicht notwendig schlicht). Es ist  $f(z)$  schlicht  $F(z)$  untergeordnet, wenn  $\mathfrak{G}(f)$  ein schlichter Teil von  $\mathfrak{G}(F)$  ist (vgl. dies. Zbl. 20, 140). Wir schreiben kurz  $f(z) \prec F(z)$  bzw.  $f(z) \prec_s F(z)$ . O. B. d. A. sei  $z_0 = 0$ ,  $W_0 = 0$  und

$$F(z) = \sum_{k=1}^\infty A_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=1}^\infty a_k z^k$$

um  $z_0 = 0$ . Der Verf. betrachtet das Koeffizientenproblem: Zusammenhang zwischen den  $a_k$  und  $A_k$ , und zwar teilt sich das Problem in zwei Teile: A) Geg.  $F(z)$ , gesucht Schranken für  $|a_n|$  für festes  $n$  und alle  $f(z) \prec F(z)$ . B) Geg.  $F(z)$  und  $f(z) \prec F(z)$  und gesucht Schranken für die Folge  $\{|a_n|\}$ . Dasselbe Problem kann für schlichte Unterordnung gestellt werden. Zunächst zeigt der Verf. sowohl für A) wie für B)

$$|a_n| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} (|A_k|),$$



und zwar ist die Größenordnung  $\sqrt[n]{n}$  scharf, sogar wenn  $f(z) \prec F(z)$ . Weiter ist  $\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \leq \sum_{n=1}^m |A_n|^2$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) und bei schlichter Unterordnung  $\sum_{n=1}^m n |a_n|^2 \leq \sum_{n=1}^m n |A_n|^2$ . Sind die  $A_i \geq 0$ , nichtwachsend und konvex, dann ist  $|a_n| \leq A_1$ ; sind sie  $\geq 0$ , nichtabnehmend und konvex, dann ist  $|a_n| \leq A_n$ . Die Schranken sind scharf. Es werde nun  $F(z)$  als schlicht angenommen. Dann ist  $|a_n| \leq r^{-n} M_1(F, r)$  wo  $M_1(F, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\vartheta})| d\vartheta$ . Es ist nun  $M_1(F, r) \leq \frac{|A_1|r}{1-r}$ , also  $|a_n| < e|A_1|n$ .

Es wird vermutet: Ist  $f(z) \prec F(z)$ , so ist  $|a_n| \leq n|A_1|$  (verallgemeinerte Bieberbachsche Vermutung). Bewiesen ist sie für  $n = 1, 2$  wie bei der gewöhnlichen Bieberbachschen Vermutung (vgl. dies. Zbl. 20, 140). Der Verf. beweist diese Vermutung, wenn  $F(z)$  reelle Koeffizienten hat oder wenn sie  $|z| \leq 1$  in einen Sternbereich in bezug auf 0 abbildet. Auch soweit war die gewöhnliche Vermutung schon bewiesen.

E. Hlawka (Wien).

Dufresnoy, Jacques: Esquisse d'une théorie des familles complexes normales. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 681—683 (1943).

Unter dem Abstand zweier  $(n+1)$ -gliedriger Zahlfolgen  $w^{(1)}$  und  $w^{(2)}$  mit den Elementen  $w_0^{(1)}, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}$  bzw.  $w_0^{(2)}, w_1^{(2)}, \dots, w_n^{(2)}$  werde die Zahl

$$[w^{(1)}, w^{(2)}] = \sqrt{\sum |w_i^{(1)} w_j^{(2)} - w_j^{(1)} w_i^{(2)}|^2 : (\sum |w_i^{(1)}|^2 \cdot \sum |w_i^{(2)}|^2)}$$

verstanden. Zwei proportionale Zahlfolgen sollen als identisch gelten. Demgemäß ist auch die Funktionsfolge  $f(x) = f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$  von der Multiplikation mit einer Funktion unabhängig. Mit Hilfe des obigen Abstandsbegriffes können für Funktionsfolgen die Stetigkeits- und Konvergenzbegriffe naturgemäß erklärt werden, und man kann die Definition aufstellen: Eine Familie von Funktionsfolgen heiße normal im Gebiet  $D$ , wenn aus jeder unendlichen Folge von zur Familie gehörigen Funktionsfolgen sich eine im Inneren von  $D$  gleichmäßig konvergente unendliche Teilfolge absondern läßt. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für Normalität an. Für reguläranalytische Funktionen gilt als solche z. B. die gleichmäßige Beschränktheit aller Ausdrücke  $\sqrt{\sum |f_i f_j' - f_j f_i'|^2 : \sum |f_i|^2}$  der Familie im Inneren von  $D$ .

G. af Hällström (Åbo).

Dufresnoy, Jacques: Sur les familles complexes normales. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 715—717 (1943).

Im Anschluß an die vorstehend besprochene Note betrachtet Verf. hier erstens Linearkombinationen der Glieder von  $(n+1)$ -gliedrigen Funktionsfolgen. Zweitens definiert er die Normalität einer Familie von  $n$ -deutigen Algebroiden  $w(x)$ , welche durch Gleichungen der Form  $f_0 w^n + f_1 w^{n-1} + \dots + f_n = 0$  gegeben sind. Sie sei zugleich mit der Familie der definierenden Funktionsfolgen  $f(x)$  normal. Es ergeben sich in dieser Weise Erweiterungen der Sätze von Landau und Schottky auf den Fall algebroider Funktionen.

G. af Hällström (Åbo)

## Modulfunktionen:

Petersson, Hans: Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihen von der Dimension — 2 zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren. Math. Z. 49, 441—496 (1944).

In einer vorangehenden Arbeit (J. IV, dies Zbl. 25, 46) hat Verf. drei Typen von Poincaré-Reihen aufgestellt, nämlich Poincaré-Reihen zu einem parabolischen Fixpunkt, zu einem Nichtfixpunkt und zu einem hyperbolischen Fixpunktpaar. Sie entstehen bei Wahl geeigneter Ortsvariablen in jedem der drei Fälle als Quersummen der Entwicklung einer automorphen Form nach dieser Ortsvariablen. Verf. spricht

daher kurz von parabolischen, elliptischen und hyperbolischen Quersummen. Die im parabolischen Fall entwickelte Theorie hat Verf. in einer J IV vorangehenden Arbeit (J III, dies. Zbl. 23, 315) für elliptische Quersummen nutzbar gemacht, indem er eine elliptische Quersumme nach parabolischen Quersummen entwickelte. Eine solche analytische Beziehung ( $R$ ), die nicht auf dem Umwege über automorphe Formen gewonnen werden muß, wird entsprechend hier durch Entwicklung der (spezialisierten) elliptischen Quersumme

$$P_{-r}(\tau, z) = \sum_{L \subset \Gamma} (v(L))^{-1} (\gamma\tau + \delta)^{-r} (L\tau - \bar{z})^{-r}, \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

nach hyperbolischen Quersummen

$$E_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, n) = \sum_{B \subset \sigma(H, \Gamma)} (B\tau)^{\frac{\pi i(n+k)}{\log \mu'}} (v(B))^{-1} (\beta_1\tau + \beta_2)^{-\frac{r}{2}} (\beta'_1\tau + \beta'_2)^{-\frac{r}{2}}$$

erhalten, wobei die Summation über  $n$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  läuft. Das Konvergenzverhalten gestattet wie bei der Entwicklung nach parabolischen Quersummen eine Umkehrung mit Hilfe einer Integration über  $z$ . Die elliptischen Quersummen bilden also eine Brücke für die Übertragung der Theorie für parabolische Quersummen auf hyperbolische Quersummen. Dies wird insbesondere in der Metrisierungstheorie für die Berechnung des Skalarproduktes einer Quersumme mit einer ganzen Spitzenform gezeigt. — Eine Sonderstellung in der Theorie nimmt der Fall  $r = 2$ ,  $v = 1$ , der Fall der Differentialklasse, ein, weil die Reihen nicht mehr absolut konvergieren. Im Fall der Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(N)$  der Modulgruppe können für den parabolischen Typ durch ein geeignetes Summationsverfahren Quersummen definiert werden, die zu Aussagen führen, die aus der Theorie für  $r > 2$  durch formales Spezialisieren auf  $r = 2$  entstehen. Vermöge des Zusammenhanges der elliptischen Quersummen mit den parabolischen hat Verf. in J III und J IV auch den elliptischen Fall erledigt, so daß jetzt zur Abrundung der Theorie eine geeignete Definition der hyperbolischen Quersummen erforderlich ist. Verf. geht dafür von einer geeignet abgeänderten elliptischen Quersumme, von der Funktion

$$P_{-2}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{L \subset \Gamma} (\gamma\tau + \delta)^{-2} |\gamma\tau_0 + \delta|^{-s} (L\tau - \bar{z})^{-2} |L\tau_0 - \bar{z}_0|^{-s'},$$

aus, deren Konvergenzverhalten untersucht wird und deren Nullwert für  $s = s' = 0$  sich als unabhängig von  $\tau_0$  und  $z_0$  erweist. Unter der Annahme  $s = s'$ ,  $\tau = \tau_0$ ,  $z = z_0$  wird die Reihe wie beim Beweis der Relation ( $R$ ) für  $r > 2$  gliedweise entwickelt, und durch einen Integrationsprozeß, der bei ( $R$ ) die hyperbolischen Quersummen zurückgewinnen ließ, werden neue Funktionen  $Y(s, \tau, u, n)$  definiert. Ihr Nullwert  $Y(0, \tau, u, n)$  ist von  $u (= Hz)$  unabhängig und zeigt nach Division durch einen konstanten Faktor  $k_n$  das richtige metrische Verhalten, das Skalarprodukt mit einer ganzen Spitzenform  $\varphi(\tau)$  liefert nämlich im wesentlichen den Entwicklungskoeffizienten  $b_n(H)$  von

$$\varphi(\tau) = (\eta_1\tau + \eta_2)^{-1} (\eta'_1\tau + \eta'_2)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(H) (H\tau)^{\frac{\pi i m}{\log \mu'}}$$

In der erhaltenen Reihendarstellung für  $Y(s, \tau, u, n)$  treten aber noch unhandliche Faktoren auf, so daß  $Y(s, \tau, u, n)$  zweckmäßig durch eine andere Funktion approximiert wird, die denselben Nullwert besitzt. So erhält Verf. schließlich in der für  $\Re s > 0$ ,  $\Re \tau > 0$  konvergenten von dem Faktor befreiten Reihe

$$E_{-2}(s, \tau, H, \Gamma(N), n) = \sum_{B \subset \sigma(H, \Gamma)} (B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} (\beta_1\tau + \beta_2) (\beta'_1\tau + \beta'_2) |\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1\tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}$$

eine in  $s$  und  $\tau$  stetige in  $s$  regulär analytische Funktion, die in das Gebiet  $|s| < \varrho_n$  mit  $0 < \varrho_n < \frac{1}{2}$  regulär analytisch fortgesetzt werden kann und deren Nullwert für  $s = 0$  das richtige metrische Verhalten zeigt. — Den Schluß der Arbeit bildet nach einem Nachtrag zu J III über Hauptssysteme der Beweis eines neuen Vollständigkeitssatzes,



der die Bestimmung von  $p$  den Rückkehrschnitten auf der Riemannschen Fläche von  $\Gamma(N)$  zugeordneten Matrizen  $H_m$  liefert, so daß man in  $\Xi_{-2}(0, \tau, H_m, \Gamma(N), 0)$  eine Basis der Schar der ganzen Spitzenformen erhält. Eine weitere Anwendung der Reihen bei der Berechnung der Integralperioden von  $\Gamma(N)$  wird in der Einleitung aufgezeigt.  
*E. Schulenberg* (Berlin).

### Gewöhnliche Differentialgleichungen:

**Caligo, Domenico:** *Sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti periodici.* Estratto di Mem. Accad. Ital., VII. s. 13, 1025—1033 (1943).

Es wird bewiesen: Es seien  $p(t)$  und  $q(t)$  reelle, nichtnegative, stetige, periodische Funktionen mit der Periode  $\omega > 0$ , welche nur in einer Nullmenge verschwinden. Damit alle Lösungen der Differentialgleichung  $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$  stabil seien, ist hinreichend das gleichzeitige Bestehen folgender Ungleichungen:

$$\int_0^\omega (\omega - t) q(t) dt \leq 1; \quad p(t) \leq q(t) \cdot \left[ 1 - \int_0^t (t - \tau) q(\tau) d\tau \right] : \left[ \int_0^t q(\tau) d\tau \right];$$

$$\int_0^t p(\tau) d\tau \leq 1 - \int_0^t \tau q(\tau) d\tau;$$

$$\int_0^\omega p(t) dt \leq \left[ \int_0^\omega q(t) \left\{ \omega \left[ 1 - \int_0^t (t - \tau) q(\tau) d\tau \right] + \int_0^t (t - \tau)^2 q(\tau) d\tau \right\} dt \right] : \left[ 1 + 2\omega \int_0^\omega q(t) dt \right].$$

Diese Bedingungen stellen eine Verbesserung der von Calamai (dies. Zbl. 27, 397) angegebenen dar. Für  $p \equiv 0$ ,  $q > 0$  ist die Bedingung von Liapounoff [C. R. Acad. Sci., Paris 128, 910—913 (1899)] eine Folge aus den obigen. *Haupt* (Erlangen).

**Jeffreys, Harold:** *Asymptotic solutions of linear differential equations.* Philos. Mag. VII. s. 33, 451—456 (1942).

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = X(x) y = (h^2 X_0 + h X_1 + X_2) y, \quad (1)$$

wobei  $h$  groß und unabhängig von  $x$ ,  $X_0$ ,  $X_1$  und  $X_2$  gegebene Funktionen von  $x$  sind, hat für den Fall, daß  $x$  aus einem Intervall stammt, in dem  $X_0$  nicht verschwindet, für große Werte von  $h$  die asymptotische Lösung

$$X_0^{-1/4} \exp \left[ \pm \int^x (h X_0^{1/2} + X_1/X_0^{1/2}) dx \right] \{1 + O(h^{-1})\}, \quad (2)$$

wie Verf. zeigte. Er untersucht dann den Fall, daß  $X_0$  eine einfache Nullstelle besitzt und zeigt, daß zu beiden Seiten einer solchen Nullstelle Lösungen vom Typus (2) vorhanden sind, die ineinander übergeführt werden können. Als Beispiel betrachtet Verf. die Besselsche Differentialgleichung für große Werte des Parameters. *Wegner*.

**Klotter, Karl, und Gertrud Kotowski:** *Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern.* 1. Mitt.: *Über die Gleichung  $y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x) y = 0$ .* Z. angew. Math. Mech. 23, 149—155 (1943).  
 Verff. betrachten die Differentialgl.:

$$y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x) y = 0,$$

welche drei voneinander unabhängige Parameter enthält. Diese drei Parameter werden als rechtwinklige Koordinaten eines Raumes aufgefaßt. Verff. stellen sich die Aufgabe, jene Bereiche dieses Raumes zu ermitteln, in denen die beiden voneinander linear unabhängigen Lösungen obiger Differentialgl. stabil sind, d. h. bei unbeschränkt wachsender unabhängigen Veränderlichen beide beschränkt bleiben. Zur Ermittlung dieser stabilen Bereiche genügt es, unter Heranziehung bekannter Sätze von O. Haupt jene Flächen zu ermitteln, welche zu Parameterwerten gehören, denen rein periodische Lösungen der Differentialgleichungen entsprechen, mit den gleichen Perioden, welche in der Belegungsfunktion der Differentialgl. enthalten sind. Verff.

setzen diese periodischen Lösungen als Fourierreihen an, im Anschluß an das analoge Lösungsverfahren bei der Mathieschen Differentialgl. Einsetzen in die Differentialgl. ergibt dann unmittelbar Sätze unendlich vieler linearer Gleichungen für die Fourierkoeffizienten, aus denen sich durch Nullsetzen ihrer Determinante die gesuchten Parameterflächen berechnen lassen. Verff. führen diese Berechnungen in einem gewissen Bereich um den Koordinatennullpunkt herum numerisch durch und stellen die erhaltenen Flächen sowie den hiermit ermittelten Stabilitätskörper in Kurven und Modellen dar.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

## Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Reisch, Paul: Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen  $\Phi(x) \Phi(y) = \Phi(xy)$ . Math. Z. **49**, 411—426 (1944).

Es werden weitere Lösungen der Funktionalgleichung (1)  $\Phi(X)\Phi(Y) = \Phi(XY)$  angegeben im Anschluß an eine Arbeit von O. Perron (dies. Zbl. **26**, 405). Dort wurde bewiesen, daß die in der Umgebung von  $X = E$  analytischen Lösungen von (1) mit  $\Phi(E_n) = E_n$  [ $n$  bzw.  $\nu$  die Reihenzahl der Matrizen  $X$  bzw.  $\Phi(X)$ ] identisch sind mit den Lösungen des partiellen Differentialgleichungssystems

$$|X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X) A^{pq}, \quad s, q = 1, \dots, n,$$

die denselben Bedingungen genügen. Die  $A^{pq}$  sind dabei konstante Matrizen, die gewissen Bedingungen genügen müssen. Verf. beweist nun, daß, wenn  $A^{11} = \lambda E$  lauter verschiedene lineare Elementarteiler besitzt, sich in der Umgebung von  $X = E$  analytische irreduzible Lösungen nur für  $n = 2$  ergeben, die die Form  $|X|^\alpha \Phi_\nu(X)$  haben, wobei die Elemente von  $\Phi_\nu(X)$  homogene Polynome vom Grad  $\nu - 1$  in  $x_{11}, \dots, x_{22}$  sind,

$$\varphi_{\varrho\sigma}(X) = \sum_{\mu_1 \leq i \leq \mu_2} \binom{\varrho-1}{i-1} \binom{\nu-\varrho}{\sigma-2} x_{11}^{\nu-\varrho-\sigma+i} x_{21}^{\varrho-i} x_{12}^{\sigma-i} x_{22}^{i-1},$$

$$\mu_1 = \text{Max}(1, \varrho + \sigma - \nu), \quad \mu_2 = \text{Min}(\varrho, \sigma),$$

$\varrho, \sigma = 1, \dots, \nu$ . Es ist  $|\Phi_\nu(X)| = |X|^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$ . Ferner gilt: Hat für  $\nu = 4$  die Matrix  $A^{11} = \lambda E$  zwei quadratische Elementarteiler, so gibt es in der Umgebung von  $X = E$  analytische, nichttriviale irreduzible Lösungen von (1) nur für  $n = 2$ . Sie sind der folgenden äquivalent:

$$\Phi(X) = |X|^\alpha \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{11} \log |X| & x_{12} \log |X| & x_{11} & x_{12} \\ x_{21} \log |X| & x_{22} \log |X| & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Köthe (Gießen).

Schouten, J. A., und W. van der Kulk: Beiträge zur Theorie der Pfaffschen Gleichungssysteme. 9. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. **52**, Nr 7, 415—420 (1943) [Holländisch].

Vgl. die früheren Mitteilungen in dies. Zbl. **22**, 343; **23**, 40, 229; **27**, 315; **28**, 64, 163. — Eine Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$  ist ein System von  $\infty^{2n-m}$  Vektorelementen in  $X_n$ , das durch  $m$  Gleichungen in  $\xi^\alpha, w_\lambda$  gegeben ist, deren  $\xi^\alpha, w_\lambda$ -Rang gleich  $m$  ist. Ist der  $w_\lambda$ -Rang  $r$  des Systems gleich  $m$ , so ist die Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$  ein  $\mathfrak{B}_{n-m}$ -Feld. Ist  $r < m$ , so ist die Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$  ein  $\mathfrak{B}_{n-r}$ -Feld über einer  $X_{n-m+r}$ . Nach Definition der Begriffe: Klasse  $K^*$ , Zeiger  $l^*$  ( $l^* = 0$  oder 1) und vollständige Integrabilität für Lösungen von der Klasse  $K$ , werden folgende Sätze angekündigt: 1. Jede Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$ ,  $m \leq n$ , mit  $r < m$  kann mittels einer homogenen Berührungstransformation übergeführt



werden in eine Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$  mit  $r = m$ . 2. Haupttheorem für die Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$ : Eine Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$ ,  $m \leq n$  von der Klasse  $K^*$  ist dann und nur dann vollständig integrabel für Lösungen von der Klasse  $K$ , wenn

$$K^* \leq K \leq K^* + 2(n-m); K \leq n.$$

3. Jede Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$  kann mittels einer homogenen Berührungstransformation übergeführt werden in eine Vektor- $\mathfrak{M}_{2n-m}$  mit den Gleichungen

$$\xi^1 = 0; \dots; \xi^m - e^{*-s} = 0; w_1 = 0; \dots; w_{e^*-1} = 0; w_{e^*} = l^* - \varepsilon; \varepsilon w_{m-e^*} = \varepsilon$$

$$K^* = 2\rho + \varepsilon; \varepsilon = 1 \text{ oder } 0.$$

*Autoreferat.*

**Kowalewski, Gerhard:** Neues Beispiel einer genetisch darstellbaren Berührungstransformation. J. reine angew. Math. 185, 102—105 (1943).

Verf. betrachtet folgende Transformation: Den ebenen Linienelementen  $x, y, y'$  werden diejenigen Punkte  $X, Y$  zugeordnet, die gleichweit vom Ursprung und vom Punkt  $x, y$  entfernt sind. Durch eine kleine Rechnung wird nachgewiesen, daß sich diese Transformation in eine eingliedrige Gruppe einbetten, d. h. genetisch darstellen läßt.

*Bureau (Hamburg).*

**Humbert, Pierre:** Solution nouvelle de l'équation  $\Delta_3 U = U$ . C. R. Acad. Sci., Paris 216, 657—659 (1943).

Mit den Setzungen

$$x = x_1^2 + \frac{1}{3}(3y_1^2 - z_1^2), \quad y = x_1^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{3}y_1 + z_1)^2, \quad z = x_1^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{3}y_1 - z_1)^2$$

hat die Differentialgleichung

$$\Delta_3 U \equiv \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = U$$

die Lösung

$$U = \exp(x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2) D_n(z_1) D_{-n}(iy_1),$$

worin  $D_n$  die Weberschen Funktionen des parabolischen Zylinders bedeuten.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Faedo, Sandro:** Sul metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione. Comment. Pontif. Accad. Sci. 6, 657—685 (1942).

Die Variationsmethode von Picone (dies. Zbl. 16, 176 und 20, 127) wird mit Vorteil auf Differentialgleichungen von Schwingungsproblemen angewandt. Ihr wesentlicher Inhalt ist folgender: Für die unbekannte Funktion  $u(x, t)$  der Ortsvariablen

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ und der Zeit } t \text{ werden Annäherungen } u_n = \sum_{v=1}^n \varphi_v(x) \omega_v(t) \text{ berechnet;}$$

dabei bedeutet  $\{\varphi_v(x)\}$  ein im betrachteten Bereich  $\mathfrak{B}$  passendes gewähltes vollständiges Funktionssystem; die  $\omega_v(t)$  werden dadurch bestimmt, daß man den quadratischen Fehler der Differentialgleichung  $E(u) = 0$  in  $\mathfrak{B}$  und der Randbedingungen  $A(u) = 0$  auf dem Rande  $\mathfrak{R} \mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{B}$  möglichst klein macht, d. h. daß man das Variationsproblem

$$I_n = \int_0^T \left\{ \int_{\mathfrak{B}} [\theta_1(u_n)]^2 d\tau + \int_{\mathfrak{R} \mathfrak{B}} [\theta_2(u_n)]^2 d\sigma \right\} dt = \text{Min.}$$

löst. Dieser Ansatz hat noch viele Freiheiten — nämlich die Auswahl der Gewichtsfunktionen  $\theta_1, \theta_2$  und des Systems  $\{\varphi_v(x)\}$  — und läßt noch eine Reihe von Fragen offen — nämlich die Fragen, ob die  $n$ -te Annäherung immer existiert und eindeutig bestimmt ist, und ob sie gegen die Lösung unseres Problems konvergiert. Picone hat unter Voraussetzung der Existenz der Lösung bewiesen, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  ist. B. Manià (dies. Zbl. 23, 137) hat die Existenz der  $n$ -ten Annäherung im Falle eines endlichen Zeitintervalls dargetan, der Verf. (dies. Zbl. 25, 331) dies auf  $T = \infty$  ausgedehnt. Die Auswahl des Systems  $\{\varphi_v(x)\}$  erfordert besondere Untersuchungen, wenn die Methode auf

Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt wird; Verf. zeigt, daß man diese Schwierigkeiten vermeiden kann, wenn man zum Funktional  $I_n$  noch einen Ausdruck der

Art  $\frac{1}{n} \int_0^T \sum_{v=1}^n (\omega_v'')^2 dt$  hinzufügt; das gilt auch für das Zeitintervall  $(0, \infty)$ . Gröbner.

**Ettore, Maria Laura:** Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend. IV. s. 13, 12 pag. (1942).

Die ebene Schwingungsgleichung (1)  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$  mit der Randbedingung  $u = 0$  für den Fall eines elliptischen Grundgebietes mit den Halbachsen 1,  $q \leq 1$  behandelt Verf. folgendermaßen. Sie transformiert (1) durch  $x = \varrho \cos \theta$ ,  $y = q \varrho \sin \theta$  auf die Variablen  $\varrho, \theta$ , setzt für  $u(\varrho, \theta)$  eine Fourierentwicklung

$$u(\varrho, \theta) = \frac{1}{2} u_0(\varrho) + \sum_{v=1}^{\infty} [u_v(\varrho) \cos v\theta + v_v(\varrho) \sin v\theta] \quad (2)$$

an und geht damit in die linke Seite von (1) ein; von dem so erhaltenen Ausdruck bildet sie durch Multiplikation mit  $1, \cos v\theta, \sin v\theta$  und Integration über  $\theta$  von 0 bis  $2\pi$  die sog. Momente, die einzeln gleich Null gesetzt werden. So entsteht ein Differentialsystem für  $u_v(\varrho), v_v(\varrho)$  von 2. Ordnung. Die Regularität der Lösung im Nullpunkt bedingt, daß  $u_v, v_v$  zugleich mit  $v$  gerade bzw. ungerade sind und für  $\varrho = 0$  von der Ordnung  $v$  verschwinden. Die Randbedingung verlangt  $u_v(1) = v_v(1) = 0$ . Indem von der Reihe (1) endliche Abschnitte betrachtet werden und das zugehörige Differentialsystem samt Randbedingung durch Besselfunktionen bzw. Potenzreihenansatz gelöst wird, erhält man transzendente Gleichungen zur Bestimmung der Näherungen für die Eigenwerte  $\lambda^2$ . Verf. führt diese Methode numerisch für  $v \leq 2$  durch und gewinnt damit Näherungen für  $\lambda_{\mu, v}(\mu, v \leq 2)$ ; die zweite Näherung für den Grundton  $\lambda_{01}$  läßt sich durch die Formel

$$\lambda_{01} \sim \mu_{01} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{q^2} \right)}$$

wiedergeben, in der  $\mu_{01} = 2.405$  die kleinste positive Nullstelle von  $I_0(x)$  bezeichnet. Die Tabellen sind für  $q = 0, 0.1, \dots, 0.9, 1$  berechnet. Das gleiche Problem wurde mittels Lam'scher Funktionen von R. C. Maclaurin, Trans. Cambridge Phil. Soc. 17, 41—108 (1899), insbesondere S. 72f., behandelt. Harald Geppert (Berlin).

**Pleijel, Åke:** Quelques problèmes de vibrations et les méthodes directes du calcul des variations. Ark. Mat. Astron. Fys. 29A, Nr 23, 1—17 (1943).

Für die Probleme: (1)  $\Delta u + \lambda k(x, y) u = 0$  in  $S$  mit den Randbedingungen (I)  $u = 0$  auf  $R$ , (II)  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  auf  $R$  hat R. Courant (Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, 470—554 (1937); dies. Zbl. 17, 397) unter der Voraussetzung (a)  $k(x, y) > 0$  in  $S$  ein direktes Variationsverfahren entwickelt, das auf einem Hilfssatz von Rellich beruht. Es besteht in der Bestimmung des Minimums von  $D(u) = \iint_S (u_x^2 + u_y^2) dx dy$  bei der Nebenbedingung  $K(u) = \iint_S k u^2 dx dy = 1$  und der Randbedingung (I) bzw. keiner Randbedingung, wobei zur Bestimmung höherer Eigenfunktionen noch Orthogonalitätsbedingungen zu den vorangehenden Eigenfunktionen hinzutreten. Wesentlich ist für das Verfahren die Möglichkeit der Abschätzung von  $H(u) = \iint_S u^2 dx dy$  durch  $D(u)$ . Verf. behandelt nun die Modifikationen, denen

dieses Verfahren samt Beweis zu unterwerfen ist, wenn  $k(x, y)$  in  $S$  sein Zeichen wechselt. Das Problem (II) hängt eng mit dem anderen zusammen, bei dem die Randbedingung (I) durch die Forderung (III)  $\iint_S k u dx dy = 0$  ersetzt wird. Ist zunächst (b)  $\iint_S k dx dy \neq 0$ , so zeigt Verf., daß für eine (III) erfüllende reguläre Funktionsfolge  $u_i$ , für die  $D(u_i)$  gleichmäßig beschränkt ist, auch  $H(u_i)$  beschränkt bleibt;



dies genügt, um über den Rellichschen Hilfssatz den Courantschen Gedankengang zur Anwendung zu bringen. Ist aber (c)  $\iint_S k \, dx \, dy = 0$ , so kann man von einer Minimalfolge  $u_i$  zu einer anderen  $u'_i = u_i + c_i$  mit  $\iint_S u'_i \, dx \, dy = 0$  übergehen, für die sich wiederum  $H(u'_i)$  als beschränkt herausstellt. Zum Schluß zeigt Verf., wie die von ihm erweiterten Courantschen Methoden auch verwickeltere Randwertprobleme lösen können und führt dies am Beispiel der elastischen Schwingungen eines homogenen isotropen Körpers aus.

Harald Geppert (Berlin).

Brelot, M.: Sur les ensembles effilés. Bull. Sci. math., II. s. 68, 12—36 (1944).

Verf. gibt zuerst notwendige und hinreichende Kriterien, daß eine Punktmenge  $E$  „effilé“ im Punkt 0 ist (siehe Definition dies. Zbl. 24, 403) in dem Falle, wo der Punkt 0 nicht isoliert in  $E + 0$  ist. Dadurch kann man auch den Begriff „effilé“ mit Hilfe des Potentials einer positiven Massenbelegung erklären. Eine Punktmenge  $E$  wird vom Verf. als „effilé d'allure  $\varphi$ “ im Punkt 0 bezeichnet, wenn in der Umgebung von 0 eine positive Massenbelegung existiert, so daß das Potential  $v(P)$  im Punkt 0 endlich ist und  $\liminf v(P)/\varphi(P) > 0$ , wobei  $\varphi(P) \rightarrow +\infty$  ( $P \rightarrow 0$ ,  $P \neq 0$ ,  $P \in E$ ).  $\varphi$  wird als endlich oder nicht im Durchschnitt  $E \cdot C0$  erklärt. Ist ein Punkt 0 nicht isoliert in  $E + 0$ , so ist notwendig und hinreichend, daß  $\lim v(P)/\varphi(P)h(0P) > 0$  oder auch  $v(P)/\varphi(P)h(0P) \rightarrow \infty$  ( $P \rightarrow 0$ ,  $P \neq 0$ ,  $P \in E$ ;  $h(0P)$  bedeutet in der Ebene  $\lg 1/0P$ , im  $n(>2)$ -dim. Raum  $1/0P^{n-2}$ ), damit  $E$  „effilé d'allure  $\varphi$ “ ist. Weiter werden Kriterien gegeben mit Hilfe der „Extremisation“ einer subharmonischen Funktion [für diesen Begriff s. Verf., Bull. Acad. Belgique 25, 125 (1939); dies. Zbl. 23, 128], daß  $E$  „effilé“ oder „effilé d'allure  $\varphi$ “ in 0 sei. Das Wienerische Regularitätskriterium wird mit Hilfe dieser neuen Begriffe bewiesen. Zwischen Pseudolimes, den Verf. einführt, und Quasilimes [s. Verf., dies. Zbl. 6, 203] wie auch zwischen komplementärer Menge einer „effilé“-Menge und Quasiumgebung besteht ein Zusammenhang; man kann also das Verhalten der Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems (Wienerische Funktion) in der Umgebung eines irregulären Randpunktes mit Hilfe dieser neuen Mittel besser behandeln, wie Verf. im letzten Kapitel seiner Arbeit zeigt.

D. A. Kappos (Leipzig).

Nef, Walter: Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für Potentialfunktionen. Comment. math. helv. 16, 215—241 (1944).

Verf. zeigt: Die partiellen Ableitungen erster Ordnung einer im Inneren der Einheitskugel des  $n$ -dimensionalen Raumes regulären harmonischen Funktion  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  mögen dort beschränkt sein. Dann konvergieren diese Ableitungen bei radialer Annäherung von innen an fast alle Kugelpunkte. — Für zwei Dimensionen folgt dies aus einem Satz von Fatou über die Grenzwerte analytischer Funktionen bei Annäherung an den Einheitskreis. — Entsprechend entwickelt Verf. den Beweis des obigen Satzes aus einer Reihe von Sätzen über regulär hyperkomplexe Funktionen und deren Zusammenhang mit harmonischen Funktionen.

Maruhn (Berlin).

Teissier du Cros, F.: Sur l'ensemble des fonctions sousharmoniques et l'ensemble des fonctions harmoniques dans un cercle. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 437—438 (1943).

Die im Innern eines Kreisbereiches  $C$  subharmonischen Funktionen haben folgende Eigenschaften: 1) Sind  $u$  und  $v$  subharmonisch, so gilt dies auch von  $au + bv$  ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  konstant). 2) Es liege der Punkt  $m$  in dem ganz im Inneren von  $C$  gelegenen Kreisbereiche  $c$ , und es führe eine konforme Abbildung von  $c$  auf  $Cm$  in  $M$  über. Dann ist  $U(M) = u(m)$  auch subharmonisch. 3)  $u(m)$  nimmt in  $c$  seine obere Grenze auf der Berandung an. — Verf. zeigt nun, daß umgekehrt die Gesamtheit der in  $C$  stetigen Funktionen, die die obigen drei Eigenschaften besitzen (man ersetze „subharmonisch“ durch „zur Gesamtheit gehörig“), subharmonisch sind.

Maruhn (Berlin).

Schwarzer, H.: Ein Verfahren zur Bestimmung des Potentials einer gleichförmigen Doppelschicht. Arch. Elektrotechn. 37, 505—508 (1943).

Bekanntlich ist das Potential der Doppelbelegung einer Fläche bei konstanter

Belegungsdichte bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Raumwinkel, unter dem die Fläche vom Aufpunkt aus erscheint. Für die näherungsweise Bestimmung dieses Winkels bei einer ebenen Fläche wird eine nicht sehr klare und einwandfreie Rechnung angegeben.

H. Hornich (Wien).

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Colombo, S.: Sur quelques correspondances symboliques. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 368—369 (1943).

Aus zwei bekannten Laplaceschen Transformationsformeln wird — ohne Berücksichtigung der Mehrdeutigkeit der Umkehrungen — eine Integralgleichung für  $\int_0^\infty \frac{x^t dt}{\Gamma(t+1)}$  gewonnen.

v. Szentmártony (Budapest).

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Dieudonné, Jean: Sur la séparation des ensembles convexes dans un espace de Banach. Rev. Scient., Paris 81, 277—278 (1943).

Nach Tukey (dies. Zbl. 28, 232) sind in einem Banachraum  $E$  zwei konvexe abgeschlossene beschränkte Mengen ohne gemeinsame Punkte stets durch eine Hyperebene trennbar, falls  $E$  reflexiv ist (d. h. mit dem zweiten konjugierten Raum zusammenfällt). Es wird an einem Beispiel gezeigt, daß diese letzte Voraussetzung wesentlich ist.

Lorentz (Tübingen).

Hoheisel, Guido: Existenz von Eigenwerten und Vollständigkeitskriterium. Abh. preuß. Akad. Wiss., Naturwiss. Kl. 1943, 1—7 (Nr 3).

Verf. gibt einen klassisch-einfachen, für sehr allgemeine lineare Operatoren in abstrakten Räumen gültigen Beweis für die Existenz von Eigenwerten.  $f, g, \dots$  seien Elemente eines durch einen komplexen hermiteschen Skalar  $(f, g)$  metrisierten linearen Raumes  $\mathfrak{H}$  mit dem Nullelement  $0'$ . Für einen linearen Teilraum  $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}$  mit den Elementen  $u, v, \dots$  sei ein homogenlinearer Operator  $L$  erklärt. Hat die mit dem reellen Parameter  $\lambda$  gebildete Gleichung  $L_\lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u = 0'$  eine von  $0'$  verschiedene Lösung  $u$  in  $\mathfrak{H}'$ , so heißt  $\lambda$  Eigenwert. Verf. macht folgende Voraussetzungen: (1) Ein Häufungspunkt von Eigenwerten ist wieder ein Eigenwert; liegt  $\lambda$  in der zu den Eigenwerten komplementären Menge  $\mathfrak{M}$ , so hat die Gleichung  $L_\lambda(u) = h$  ( $h \in \mathfrak{H}$ ) höchstens eine Lösung  $u \in \mathfrak{H}'$ . (2) Es gibt wenigstens ein  $h$  mit  $\|h\| > 0$ , für das es bei jedem  $\lambda \in \mathfrak{M}$  eine Lösung  $u_\lambda$  ( $u_\lambda \in \mathfrak{H}'$ ) von  $L_\lambda(u) = h$  gibt. (3)  $L$  ist selbstadjungiert, d. h.  $(u, L(v)) = (L(u), v)$ . (4) Es existiert  $\frac{\delta u_\lambda}{\delta \lambda} \in \mathfrak{H}'$  und gilt  $\frac{\delta}{\delta \lambda} L(u_\lambda) = L\left(\frac{\delta u_\lambda}{\delta \lambda}\right)$ . Dann beweist er die Existenz mindestens eines Eigenwertes  $k$ , indem er für ein Intervall von  $\mathfrak{M}$  angehörige Parameterwerte  $\lambda, \mu$  den Ausdruck  $V(\lambda) = (u_\mu, (\lambda - \mu)u_\lambda)$  bildet, ihn als reell monoton wachsend in  $\lambda$  nachweist und daraus folgert, daß  $\mathfrak{M}$  nicht aus einem beiderseitig unendlichen Intervall bestehen kann. Aus seinem Beweis folgert Verf. ein Vollständigkeitskriterium. Gilt nämlich (2) für jedes  $h \in \mathfrak{H}$  und ist die Menge der Eigenwerte von geringerer Mächtigkeit als das Kontinuum, so ist notwendig und hinreichend für die Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen (d. h. es gibt außer  $0'$  kein zu allen Eigenfunktionen orthogonales  $h$ ) der folgende Sachverhalt: Bedeutet  $u_\lambda$  die Lösung von  $L_\lambda(u) = h$  für ein zu allen Eigenfunktionen orthogonales  $h$ , so ist für jeden Eigenwert  $k$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\|u_{k \pm \varepsilon}\|^2 = o(\varepsilon^{-1})$ . Gleichbedeutend damit ist die stetige Ergänzbarkeit von  $V(\lambda)$  in jedem Punkte  $k$ , die manchmal, z. B. im Falle der Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgabe, direkt nachzuweisen ist.

Harald Geppert (Berlin).

Julia, Gaston: Sur l'adjoint de l'opérateur linéaire non borné défini par une matrice. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 853—856 (1943).

Étant donnés, dans l'espace hilbertien  $\mathfrak{H}$ , un système orthonormal complet  $\{e_k\}$  et une suite infinie d'éléments  $\{f_k\}$ , l'auteur y rattache les opérateurs  $A$  et  $A^*$  définis par



$Ag = \sum (g, e_k) f_k$  et  $A^*h = \sum (h, f_k) e_k$  pour les éléments  $g$  et  $h$  tels que la série respective converge fortement.  $A^*$  est nommé par l'auteur l'adjoint de  $A$ . Dans cette Note, on établit quelques propositions relatives au domaine d'existence de l'opérateur  $A^{**}$ , l'adjoint de l'adjoint de  $A$ . *Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Ghermanescu, Michel:** Sur une équation fonctionnelle. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 26, 79—82 (1943).

Verf. behandelt die Funktionalgleichung:

$$m^r \cdot f(mx_1, mx_2, \dots, mx_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

bei gegebenem  $F$  und gesuchtem  $f$ ;  $r$  ist reell gegeben,  $m$  beliebig. Ihre allgemeine Lösung ist

$$f(x_1, \dots, x_n) = C \cdot Q(x_1, \dots, x_n)^{-1} + F_1(x_1, \dots, x_n),$$

worin  $Q$  eine beliebige homogene Funktion  $r$ -ten Grades,  $F_1$  eine spezielle Lösung von (1) bedeuten. Solche spezielle Lösungen lassen sich in Sonderfällen angeben; z. B. falls in (1)  $F$  homogen vom Grade  $p \neq -r$  ist, ist

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = \{m^{r+p} - 1\}^{-1} \cdot F(x_1, \dots, x_n)$$

zu wählen, worin die Lösungen mehrerer von andern Autoren behandelter Funktionalgleichungen enthalten sind. Verallgemeinerung auf den Fall, daß die linke Seite von (1) die Gestalt  $m^r \cdot f(m^{\alpha_1} x_1, m^{\alpha_2} x_2, \dots, m^{\alpha_n} x_n)$  hat. *Harald Geppert (Berlin).*

## Praktische Analysis:

**Wittke, H.:** Doppelrechenmaschinen. Z. Instrumentenkde 63, 396—398 (1943).

Es handelt sich um zwei Ausführungen einer Doppelrechenmaschine, die aus zwei gekoppelten Rechenmaschinen mit gemeinsamem Umdrehungszählwerk besteht. Je nach der Stellung eines Vorzeichenhebels rechnen die Einzelmaschinen positiv oder negativ. Es können z. B. fortgesetzte Multiplikation bzw. Division und Proportionsrechnungen bequem ausgeführt werden. *Nyström (Helsinki).*

**Reiter, R.:** Das Spiegeltangentometer und seine Anwendung zur Bestimmung des Differentialquotienten von Kurven. Z. Instrumentenkde. 63, 424—426 (1943).

Das Spiegeltangentometer kann kurz als ein Spiegellineal gekennzeichnet werden, an dem noch eine Teilung zur Ablesung des Winkels der Tangente mit einer festen (waagerechten) Richtung angebracht ist. Man braucht also keine Linien einzuzichnen und kann mit den abgelesenen Werten sogleich die rechnerische Auswertung beginnen. Das Gerät ist in Aufsicht und in zwei Schnitten dargestellt. An einem Beispiel ist die Verwendung zur Bestimmung des ersten und des zweiten Differentialquotienten zu einer von einem selbstschreibenden Gerät aufgezeichneten Kurve dargelegt und dabei auch der Vergleich mit dem Spiegellineal durchgeführt, wobei die Vorteile des Spiegeltangentometers deutlich in Erscheinung treten. *L. Schrutka (Wien).*

**Monfraix, Paul:** Théorie générale des intégrateurs à roulette coupante. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 865—867 (1943).

Eine Theorie der mit Integrierrolle arbeitenden Instrumente wird in so allgemeiner Form skizziert bzw. angedeutet, daß durch Spezialisierung u. a. diejenige für Instrumente zur Lösung von Riccatischen und Abelschen Differentialgleichungen sowie für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung hervorgeht. *Nyström (Helsinki).*

● **Sanden, Horst von:** Praxis der Differentialgleichungen. Eine Einführung. 2., verb. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1944. 105 S. u. 20 Abb. RM 5.—.

Kleines Praktikum, den vom Ingenieur benötigten Stoff von den Isoklinen bis zu den Eigenwerten und den Verfahren von Rayleigh-Ritz-Galerkin reichend. Im Vergleich zur 1. Auflage (vgl. dies. Zbl. 27, 325) nur geringe Änderungen, bis auf eine neue Durcharbeitung eines Verfahrens zur numerisch-tabellarischen Integration: Es wird eine vom Verf. herrührende Rechenvorschrift, welche am meisten dem Verfahren von Adams und Störmer ähnelt, durch einen von Stohler (vgl. Zamm

1943, Bd. 23, H. 2) angegebenen Kunstgriff noch wesentlich abgekürzt. — Fortfallen dürfte die Anm. S. 66 über die Berechnung der Knicklasten eines nicht gelenkig gelagerten Stabes aus einer D'gl. 4. Ordnung, da der Weg über die ebenda angegebene D'gl. 2. Ordnung hinreichend allgemein ist, wenn dabei die den Randbedingungen entsprechenden statisch Unbestimmten berücksichtigt werden; das ist dann einfacher und anschaulicher.

v. Guérard (Darmstadt).

**Reiz, Anders:** On the numerical solution of certain types of integral equations. Ark. Mat. Astron. Fys. 29 A; Nr 29, 1—21 (1943).

Um Fredholmsche Integralgleichungen, in denen beide Integrationsgrenzen oder nur die eine von ihnen unendlich sind, numerisch zu behandeln, wird eine von A. Berger angegebene Integraltransformation ausgeführt. Man erhält dann mit ziemlich großer Genauigkeit die Werte der gesuchten Funktion in gewissen, nicht äquidistanten Punkten durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen. Werte der gesuchten Funktion in beliebigen Punkten lassen sich dann aus einem interpolierenden Ausdruck berechnen. Das Verfahren ist insbesondere — wenigstens in dem betrachteten Fall — demjenigen überlegen, die Integralgleichung vor der numerischen Behandlung auf ein endliches Intervall zurückzuführen. Integralgleichungen erster Art können in ähnlicher Weise numerisch gelöst werden. Für diese wird auch ein anderes Verfahren entwickelt. Die ausgeführten Beispiele geben gute Resultate. Es sind in erster Linie Anwendungen aus der Statistik beabsichtigt.

Nyström (Helsinki).

**Meyer-Eppler, W.:** Die Untersuchung von Schwingungsvorgängen mit dem Projektionsperiodographen. Z. Instrumentenkde. 63, 341—355 (1943).

Apparate, die es gestatten, Periodogrammuntersuchungen nicht mathematisch, sondern unter Benutzung physikalischer Effekte auszuführen, nennt man nach Stumpf „Periodographen“. Bei dem hier beschriebenen Instrument wird das Interferenzprinzip mit ruhendem Gitter benutzt. Die technische Ausführung wird eingehend beschrieben. Das Gerät ermöglicht eine rasche Durchmusterung eines gegebenen Beobachtungsstoffes nach verborgenen Periodizitäten, gestattet aber nicht die exakte Ermittlung von Amplitude und Phase der aufgefundenen Perioden. Auf das Auflösungsvermögen und die Trennschärfe wird besonders eingegangen. Desgleichen werden die Fehlermöglichkeiten in ihrer Auswirkung auf das Periodogramm eingehend besprochen. Die Anwendung des Geräts wird an Hand einiger Beispiele insbesondere aus der Fernmeldetechnik demonstriert.

A. Hofmann (Bad Homburg).

## Klassische theoretische Physik

**Riabouchinsky, Dimitri:** Sur une singularité d'analyse dimensionnelle. C. R. Acad. Sci., Paris 217, 220—223 (1943).

### Thermodynamik:

**Meixner, J.:** Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. Z. phys. Chem. Abt. B 53, 235—263 (1943).

Wie schon in einer früheren Arbeit des Verf. gezeigt wurde (dies. Zbl. 25, 122), lassen sich bei zusammengesetzten irreversiblen Prozessen, ohne spezielle kinetische Modelle zu benutzen, Beziehungen herleiten unter den Koeffizienten, welche in dem phänomenologischen Ansatz für diese irreversiblen Vorgänge auftreten. Diese Beziehungen bestehen — entsprechend der Grundlage der Methode: 2. Hauptsatz und Onsagerscher Reziprozitätssatz — in der Forderung, daß eine in bestimmter Weise gebildete Koeffizientenmatrix positiv definit und symmetrisch sein muß. Um die richtige Wahl der Koeffizienten zu treffen, ist es nötig, vorher die Strömungsgleichung für die Entropie aufzustellen. Diese Methode wird in der vorliegenden Arbeit vom Verf. auf den allgemeinsten Vorgang in einem Gasgemisch angewandt, welches einem



Temperaturgefälle ausgesetzt ist und in dem ferner Diffusions- und chemische Vorgänge stattfinden. Es ergeben sich Beziehungen zwischen Thermodiffusions- und Diffusions-thermoeffizienten, sowie zwischen den chemischen Reaktionsgeschwindigkeiten.

Waldmann (Berlin-Dahlem).

**Duclaux, Jean P. E.:** Essai de définition du liquide parfait. Ann. Phys., Paris 18, 209—215 (1943).

Bei den Gasen zeichnet das ideale Gasgesetz einen idealen Grenzzustand aus, dagegen fehlt in der Theorie der Flüssigkeiten eine ähnliche Charakterisierung eines idealen Grenzzustandes. Um diese Lücke zu schließen, werden folgende Vorschläge zur Kennzeichnung eines idealen Flüssigkeitszustandes gemacht: Man benutzt an Stelle der Zustandsgleichung die Dampfdruckgleichung. Zwischen Tripelpunkt und kritischem Punkt kann gesetzt werden: (1)  $\log \frac{p}{p_c} = n \cdot \log \frac{T}{T_c} + Q(T)$ , wo  $T, T_c$  absolute Temperatur und kritische Temperatur und  $p, p_c$  die dazugehörigen Dampfdrucke bezeichnen;  $n$  ist eine Konstante, die so bestimmt ist, daß der Restausdruck  $Q(T)$  beim Tripelpunkt  $T_t$  und kritischen Punkt  $T_c$  verschwindet. (2)  $n = \left( \log \frac{p_c}{p_t} \right) / \log \frac{T_c}{T_t}$ . Für den bei  $T_c$  und  $T_t$  verschwindenden Restausdruck  $Q$  kann dann nach dem Verf. mit hinreichender Annäherung der kubische Ausdruck (3)  $Q = C \cdot \frac{T \cdot (T - T_t)(T_c - T)}{(T + A)^3}$  eingesetzt werden, wo  $C$  eine von Substanz zu Substanz variable Konstante und (4)  $A = \frac{T_t}{2} \left[ \left( \frac{2 T_c}{T_t} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]$  ist. Da der Verlauf der Dampfdruckkurven, sofern ein Fixpunkt vorgeben ist, nach Clausius-Clapeyron nur von einer Größe, nämlich der Verdampfungswärme, abhängt, ist zu erwarten, daß zwischen den beiden Konstanten  $n$  und  $C$  obiger Formel ein Zusammenhang besteht, der etwa durch die lineare Beziehung (5)  $C = -2 + 0,55 \cdot n$  beschrieben werden kann, wie sich bei Betrachtung des empirischen Materials ergibt. Eine ideale Flüssigkeit soll nun durch  $T_t = 0$  bzw.  $T_t < T_c$  gekennzeichnet sein, dann erhält man wegen (3) und (4) bei genügend tiefen Temperaturen (6)  $Q(T) = C \cdot T_c/T$ . Wie man sofort aus der Clausius-Clapeyronschen Formel entnimmt, ist eine solche ideale Flüssigkeit bei negativem  $C$  und kleinen Temperaturen durch konstante Verdampfungswärme ausgezeichnet. Eine andere Definition der idealen Flüssigkeit ist  $C = 0$ , also  $n \approx 3\frac{1}{2}$ , so daß also  $p \sim T^{3,5}$  gilt. Diese Flüssigkeit zeigt eine konstante Verdampfungsentropie. Die Flüssigkeiten, die diesen beiden Typen am nächsten kommen, sind Hg ( $T_c/T_t = 7,4$ ) und He ( $C = 0,5$ ;  $n = 4,5$ ). Die Viskosität  $\eta$  kann auch zur Kennzeichnung eines Idealzustandes herangezogen werden. Die Definitionen sind: Unabhängigkeit von  $\eta$  von der Temperatur, bloße Volumenabhängigkeit (Idealfüssigkeit Hg); oder  $\eta = 0$  (Idealfüssigkeit He).

K. Schäfer (Göttingen).

**Wick, G. C.:** Über ebene Diffusionsprobleme. Z. Physik 121, 702—718 (1943).

Ebene Diffusionsprobleme sind in letzter Zeit mehrfach in Verbindung mit Experimenten über langsame Neutronen aufgetreten. Sie werden charakterisiert durch die Teilchendichte  $f(x, u)du$ , die an der Stelle  $x$  auf den Bereich  $u \dots u + du$  ( $u =$  Richtungskosinus der Bewegungsrichtung gegen die  $x$ -Achse) entfällt. Bezeichnet  $P_s = n \sigma_s$  den Streukoeffizient,  $P_a = n \sigma_a$  den Absorptionskoeffizient, ferner  $\sigma = P_s/(P_s + P_a)$  den „relativen“ Streuquerschnitt, so lautet die Bedingung der Stationarität

$$(1) \quad \left[ u \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right] f(x, u) - \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^{+1} f(x, v) dv = D(f) = 0,$$

bzw. bei Vorhandensein von Quellen:  $D(f) = q(x)$ . — Die hier angegebene Approximationsmethode beruht auf dem Gedanken, die Integralgleichung durch ein System von linearen Gleichungen zu ersetzen. Dazu wird das Integral durch eine Summe von

Funktionswerten ersetzt, die nach der Gaußschen Vorschrift an den Nullstellen  $u_i$  eines Legendreschen Polynoms mit geeigneten Gewichten  $p_i$  genommen werden. Aus (1) wird, wenn die betreffenden Funktionswerte  $u_i$  eingesetzt werden, ein System von linearen Differentialgleichungen. Partikuläre Integrale liefert der Ansatz  $f(x, u_i) = g(u_i) \cdot \exp(-kx)$ . Für  $k$  ergeben sich die Nullstellen  $k_\alpha$  der Gleichung

$$1 = \frac{\sigma}{2} \sum_i \frac{p_i}{1 - k u_i},$$

so daß allgemein

$$f(x, u_i) = \sum_\alpha \frac{L_\alpha}{1 - k_\alpha u_i} e^{-k_\alpha x}$$

und damit die Gesamtdichte

$$\varrho(x) = \sum_i p_i f(x, u_i) = \frac{2}{\sigma} \sum_\alpha L_\alpha e^{-k_\alpha x}$$

( $L_\alpha$ : unbestimmte Konstanten) wird. Die Integrationskonstanten  $L_\alpha$  müssen den Randbedingungen angepaßt werden. Dies wird mit Hilfe einer „Polynommethode“ für verschiedene Fälle, nämlich A. Halbraum mit einfallender Strahlung auf der Grenzfläche  $x = 0$ , B. Halbraum mit konstanter Quellendichte, keine von außen einfallende Strahlung, durchgeführt. Die Ergebnisse werden diskutiert und mit anderen Methoden verglichen. Der Arbeit ist ein Verzeichnis der für die niedrigeren Näherungen benötigten Nullstellen, Gewichte und Hilfspolynome beigegeben. *H. Volz.*

**Pugh, H. LI. D., and A. J. Harris:** The temperature distribution around a spherical hole in an infinite conducting medium. *Philos. Mag.*, VII. s. 33, 661—666 (1942).

Die Temperaturverteilung, die sich in einem Medium konstanter Dichte, spezifischer Wärme und Wärmeleitfähigkeit als Funktion der Zeit einstellt, wenn das Medium ein kugelförmiges Loch vom Radius  $a$  besitzt und zur Zeit  $t = 0$  eine kugelförmig um dieses Loch ausgebreitete Temperaturverteilung vorgegeben ist, wird berechnet, wenn die Randbedingungen für  $r = a$  lauten:  $\lambda \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} = k \cdot \Theta$  ( $\Theta$  = Temperatur,  $\lambda$  = Wärmeleitfähigkeit,  $k$  = Konstante des Newtonschen Abkühlungsgesetzes) und für  $r = \infty$  lauten:  $\lambda r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} \rightarrow 0$ . Es wird zunächst folgender Spezialfall gelöst. Die anfängliche Temperaturverteilung  $f(r) = \Theta(r)$  ist:  $\Theta = 0$  für  $a < r < r_1$ ;  $\Theta = \Theta_0 = \text{const.}$  für  $r_1 < r$ . Die Lösung dieses Teilproblems einer kugelsymmetrischen Temperaturverteilung ist bereits bekannt, sie wird von den Verff. ebenfalls in bekannter Weise mit dem Heavisideschen Operatorenkalkül gegeben. Hierauf wird folgender Spezialfall gelöst: Für  $a < r < r_1$  sei  $\Theta = 0$ , für  $r_1 < r < r_1 + \delta r_1$  sei  $\Theta = \Theta_0 = \text{const.}$ , für  $r_1 + \delta r_1 < r$  sei  $\Theta = 0$ . Die Lösung wird erhalten durch Subtraktion der beiden Lösungen des vorigen Falles, wenn man in diesen einmal  $r_1$  und einmal  $r_1 + \delta r_1$  als Grenzen der anfänglichen Verteilung benutzt. Dieser zweite Fall wird durch Grenzübergang spezialisiert zu einer Lösung, die  $\delta r_1 \rightarrow 0$  und  $\Theta_0 \cdot \delta r_1 \rightarrow 1$  entspricht. Durch Superposition, d. h. Integration, dieser letzten Grenzlösung entsteht dann die Lösung des ursprünglichen Problems mit beliebiger anfänglicher Temperaturverteilung, da die Wärmeleitgleichung eine lineare Diff.-Gl. ist. *K. Schäfer* (Göttingen).

**Elenbaas, W.:** The dissipation of heat by free convection of spheres and horizontal cylinders. *Physica*, Haag 9, 285—296 (1942).

Die Wärmeübertragung von Kugeln durch freie Konvektion in Luft wird in derselben Weise wie in einer früheren Arbeit [*Physica* 4, 761 (1937); 6, 380 (1939)] die Wärmeübertragung des Zylinders durch Kombination der Langmuirschen Hypothese (Temperaturgradient an der Grenze der Übergangsschicht zwischen Kugel und Luft unabhängig vom Kugeldurchmesser) mit Ähnlichkeitsbetrachtungen nach Nusselt berechnet. Die Rechnung liefert für die Kugel eine größere Wärmeübertragung je



Quadratcentimeter als für einen Zylinder von gleichem Durchmesser und gleicher Übertemperatur in Übereinstimmung mit den Messungen. Die Rechnung wird dann noch durch Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit von Dichte, Wärmeleitfähigkeit und Reibungskoeffizient verfeinert. Die Ergebnisse stimmen dann auch quantitativ gut mit den Messungen überein. *J. Meixner (München).*

### Elektrodynamik:

**Bikerman, J. J.:** Structure and capacity of electrical double layer. *Philos. Mag.*, VII. s. 33, 384—397 (1942).

Die Theorie der diffusen elektrischen Doppelschicht, d. h. die Theorie des Gleichgewichts zwischen äußeren elektrischen Kräften, welche positive und negative Ionen zu trennen suchen, und den osmotischen Kräften, welche einen räumlichen Ausgleich der Ionenkonzentrationen anstreben, wird verbessert durch Berücksichtigung des Ionenvolumens und einiger anderer Ioneneigenschaften. Anwendungen auf einige spezielle Fälle. *J. Meixner (München).*

**Casimir, H. B. G.:** On the transition of a sphere from the superconducting to the normal state. *Physica*, Haag 10, 757—767 (1943).

Kritische Zusammenstellung der bisherigen elektromagnetischen und thermodynamischen Betrachtungen betreffend den Übergangszustand zwischen supraleitendem und normalem Zustande einer Kugel. Verf. kommt zum Schluß, daß in dem Zwischenzustand in einem sehr reinen Einkristall Oberflächenströme existieren können, solange der relative Anteil des normal leitenden Zustandes nicht zu hoch ist. *Sauter.*

**Herpin, André:** Théorie des courbes d'hystérésis. *C. R. Acad. Sci., Paris* 217, 137 bis 139 (1943).

Zur Deutung der Hysteresiskurve nimmt Verf. an, daß die kritische Feldstärke, welche zur Erzeugung einer Wandverschiebung bei den Weiss'schen Bezirken nötig ist, keinen konstanten Wert besitzt, sondern sich von Bezirk zu Bezirk ändert. Im besonderen wird angenommen, daß sich die verschiedenen Werte der kritischen Feldstärke nach einer Gauß'schen Fehlerkurve verteilen. Verf. gibt (ohne spezielle Zahlenwerte oder Beispiele) an, daß man so Hysteresiskurven erhält, welche mit experimentell beobachteten Kurven übereinstimmen. *Sauter (München).*

**Herpin, André:** Théorie de l'effet de retard. *C. R. Acad. Sci., Paris* 217, 193—195 (1943).

Skizzierung einer Theorie der Relaxationseffekte bei der Umklappung von Weiss'schen Bezirken. Im besonderen wird angenommen, daß die Zahl der in der Sekunde umklappenden Bezirke von dem Winkel zwischen ihrer Magnetisierung und der angelegten Feldstärke einerseits und von einer allgemeinen Funktion des Überschusses der magnetischen Feldstärke über die für die Wandverschiebung erforderliche kritische Feldstärke andererseits abhängt. *Sauter (München).*

**Kaden, H.:** Elektromagnetische Schirme mit Fugen und Spalten. *Elektr. Nachr.-Techn.* 20, 159—169 (1943).

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Einfluß von Fugen und Spalten in Blechen und Platten, wie sie in der Fernmeldetechnik zur Abschirmung von Spulen, Leitungen usw. gegen äußere magnetische Wechselfelder häufig Verwendung finden, auf die Ausbildung der Wirbelströme, die solche Felder im Innern der Bleche erzeugen. Zunächst wird der Einfluß von Fugen untersucht, die parallel zur Richtung des äußeren Feldes verlaufen. Zur Beurteilung der hierbei auftretenden Verhältnisse wird der folgende idealisierte Grenzfall durchgerechnet. Symmetrisch zur  $y$ - $z$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegen in Richtung der  $y$ -Achse lückenlos, aber ohne leitende Verbindung unendlich viele Platten von der Breite  $b$  nebeneinander. In Richtung der  $z$ -Achse sind sie unendlich lang. Die Dicke der Platten in Richtung der  $x$ -Achse hat die endliche Größe  $b$ . Das äußere magnetische Wechselfeld ist auf der Seite der negativen

$x$ -Achse parallel zu  $z$ -Achse gerichtet. Die Lösung dieser Aufgabe gelingt zwar nicht für den ganzen Frequenzbereich, wenigstens nicht in numerisch brauchbarer Form. Für den praktisch wichtigsten Bereich hoher Frequenzen konnte der Verf. jedoch eine asymptotische Lösung gewinnen. Diese Lösung zeigt, daß die Umlenkung der Ströme an den Fugen das magnetische Feld in ihrer Umgebung vollständig verzerrt. Diese Verzerrung verschwindet mit zunehmender Frequenz und nimmt exponentiell mit dem Abstand von der Schirmoberfläche ab. In einer Entfernung, die gleich dem Fugenabstand ist, ist sie praktisch abgeklungen. Die technischen Folgerungen, die aus diesem Tatsachenbestand zu ziehen sind, werden am Beispiel der durch ein Schirmband geschützten verdrehten Doppelleitung, der kastenförmigen Schirmhülle und der kreiszylindrischen Schirmhülle eingehend besprochen. — Der Einfluß von Fugen und Spalten, die senkrecht zur Feldrichtung verlaufen, läßt sich rechnerisch erheblich einfacher verfolgen, da durch solche Spalte die Wirbelstrombahnen nicht geändert werden. Hier können zur analytischen Behandlung der Aufgabe im Hochfrequenzgebiet erfolgreich die Methoden der konformen Abbildung herangezogen werden, wie der Verf. an einigen einfachen Beispielen zeigt. Die Feldverzerrung verschwindet in diesem Fall mit der Breite des Spaltes, und es wirkt der Spalt auf den Innenraum wie eine magnetische leuchtende Linie. Mit Hilfe der gewonnenen Formeln wird unter anderem der Koppelwiderstand eines Schirmes mit Spalt auf eine Doppelleitung innerhalb des Schirmes berechnet.

H. Buchholz (Berlin).

**Ribaud, Gustave:** Échauffement d'un disque mince dont les faces sont normales à un champ magnétique alternatif. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 377—379 (1943).

Verf. betrachtet einen kreiszylindrischen Leiter mit geraden ebenen Endflächen, der in ein angenähert homogenes magnetisches Wechselfeld gestellt wird, dessen Kraftlinien parallel zur Zylinderachse verlaufen. Durch Versuche hat sich ergeben, daß die gesamte im Leiter zerstreute Leistung bei abnehmender Zylinderhöhe nicht monoton auf Null herabsinkt, sondern zuerst ein Minimum erreicht, dann wieder bis zu einem Maximum steigt, um dann weiter mit der Höhe auf Null herabzusinken. Zur Deutung dieses merkwürdigen Verlaufs geht Verf. von einem Ansatz für die im Leiter kreisende Stromdichte als Funktion des Abstandes vom Zentrum aus, nach dem die Stromdichte proportional zur  $n$ -ten Potenz dieses Abstandes ist. Das Minimum der aufgenommenen Leistung tritt auf, wenn die Zylinderhöhe von der Größenordnung der Eindringtiefe der Ströme in die ebenen Begrenzungsflächen ist, das Maximum hingegen, wenn die Höhe kleiner als diese Eindringtiefe ist. Aus obiger Annahme berechnet Verf. diese beiden Extremwerte der Leistungen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Magnus, W., und F. Oberhettinger:** Die Berechnung des Wellenwiderstandes einer Bandleitung mit kreisförmigem bzw. rechteckigem Außenleiterquerschnitt. Arch. Elektrotechn. 37, 380—390 (1943).

Innerhalb eines unendlich langen vollkommenen zylindrischen Leiters  $L_1$  befindet sich ein ebensolches achsenparalleles Band  $L_2$ . Der Wellenwiderstand dieser Leiteranordnung ist bekannt, wenn die Kapazität pro Längeneinheit berechnet ist. Dies erfordert in der Querschnitts- ( $x, y$ -) Ebene die Bestimmung einer Potentialfunktion  $u$ , die auf dem (durch  $L_1$  erzeugten) äußeren Rand  $C_1$  verschwindet, im Innern eindeutig und stetig ist und auf dem (von  $L_2$  herrührenden) Kurvenstück  $C_2$  mit den Endpunkten  $P_1, P_2$  einen konstanten Wert  $A$  annimmt. Kennt man die zu  $u$  konjugierte Potentialfunktion  $v$ , so ist die genannte Kapazität gleich  $[v(P_1) - v(P_2)]/2\pi A$ . Verff. behandeln solche Fälle, bei denen aus Symmetriegründen die durch  $P_1, P_2$  gehenden Feldlinien  $v = \text{const.}$ , die  $C_1$  in  $Q_1, Q_2$  treffen mögen, bekannt sind. Die Funktion  $w = u + iv$  bildet dann jeden der beiden von  $Q_1 P_1 P_2 Q_2$  begrenzten Teile des Innern von  $C_1$  konform auf ein achsenparalleles Rechteck ab, läßt sich daher bei einfachen Formen von  $C_1$  aus bekannten Abbildungsfunktionen zusammensetzen. Verff. behandeln nach dieser Methode die Fälle, wo  $C_1$  ein Kreis, Quadrat oder zwei parallele Geraden darstellt, während  $C_2$  eine möglichst symmetrisch gelegene Strecke ist; sie führen bei



der Rechtecksabbildung notwendig auf elliptische Funktionen und Integrale, deren Modul in den einzelnen Fällen berechnet wird. Die damit ermittelten exakten Formeln für die Kapazität werden bei geeigneten Abmessungen durch Näherungsformeln bequemer gemacht.

Harald Geppert (Berlin).

Oberhettinger, F.: Über ein Randwertproblem der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten. Ann. Physik, V. F. 43, 136—160 (1943).

Im Innern oder außerhalb eines unendlich langen Hohlzylinders mit kreisförmigem Querschnitt aus Material von unendlicher Leitfähigkeit befindet sich ein Hertzscher Dipol, dessen Achse parallel zu den Mantellinien des Zylinders ist. Befindet sich der Dipol außerhalb des Zylinders, so ergibt sich für die einzige von Null verschiedene Komponente  $A$  des Vektorpotentials:

$$e^{i\omega t} A = \frac{Il}{4\pi} \left( \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \gamma^2})}{H_n^{(1)}(b\sqrt{k^2 - \gamma^2})} \cdot J_n(b\sqrt{k^2 - \gamma^2}) H_n^{(1)}(\varrho\sqrt{k^2 - \gamma^2}) e^{i\gamma z} d\gamma \right).$$

Hierin bedeutet  $t$  die Zeit,  $\omega$  die Kreisfrequenz der (monochromatischen) Schwingung des Dipols,  $I$  den Strom,  $l$  die Länge des Dipols (die als sehr klein vorausgesetzt wird);  $\varrho$ ,  $\varphi$  und  $z$  sind Zylinderkoordinaten mit der Zylinderachse ( $z$ -Achse) als Symmetrieachse; der Dipol liegt in der Ebene  $z = 0$  im Abstand  $b$  von der Zylinderachse, und es ist  $r^2 = \varrho^2 + z^2$ ;  $a$  ist der Zylinderradius,  $H_n^{(1)}$  bzw.  $J_n$  sind die erste Hankelsche bzw. die Besselsche Funktion vom Index  $n$ , und  $k$  ist gleich  $\omega/c$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Schließlich ist  $\varepsilon_n = 1$  für  $n = 0$  und  $\varepsilon_n = 2$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Die Formel für  $A$  für das Zylinderinnere (wenn der Dipol im Innenraum liegt) läßt sich als Doppelsumme ohne Integrale schreiben; da das zugehörige Problem unter anderem schon von Weyrich (dies. Zbl. 10, 260) behandelt worden ist, sei hier die Wiedergabe der Formel unterlassen; die Methode des Verf. besteht in beiden Fällen darin, die Verteilung der in der Zylinderfläche fließenden Ströme zu berechnen. Die oben mitgeteilte Formel für  $A$  wird näher untersucht; unter anderem wird gezeigt, daß eine asymptotische Entwicklung der Art

$$e^{i\omega t} A = \frac{Il}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \left[ f_1(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{R} f_2(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{R^2} f_3(\vartheta, \varphi) + \dots \right]$$

besteht, worin  $R$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  räumliche Polarkoordinaten sind; es wird insbesondere

$$f_1(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n \cos n\varphi \left[ J_n(ka \sin \vartheta) - J_n(kb \sin \vartheta) \frac{H_n^{(1)}(ka \sin \vartheta)}{H_n^{(1)}(kb \sin \vartheta)} \right].$$

Die Funktion  $f(\vartheta, \varphi)$  wird für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  in einer Reihe von Fällen numerisch berechnet. (Horizontaldiagramm für die Schattenwirkung des Zylinders im Felde des Dipols.)

W. Magnus (Berlin).

Mercier, J., et P. Loudette: Étude de la stabilité des oscillations entretenues dans un système de deux circuits couplés. 1. J. Phys. Radium, VIII. s. 4, 142—154 (1943).

Verf. betrachtet einen Oszillator ungedämpfter Wellen, der mit einem passiven Sekundärkreis gekoppelt ist. Jeder der beiden Kreise enthält einen Wirkwiderstand, eine Induktivität und eine Kapazität in Reihe und ist mit dem anderen mittels einer Gegeninduktivität gekoppelt. Unter der Annahme, daß in den beiden Kreisen ungedämpfte Schwingungen stattfinden, ergibt sich eine Gleichung, welche die Dämpfungen der Kreise mit den Eigenfrequenzen und mit der Schwingungskreisfrequenz verbindet. Die letztere Kreisfrequenz liegt stets außerhalb des Bereichs zwischen den Eigenfrequenzen der Kreise. Als neue Veränderliche führt Verf. in die Schwingungsfrequenzgleichung das Verhältnis der Differenzen des Quadrates der Kreisfrequenz und des

Quadrates der Eigenfrequenzen ein. Als Funktion dieser Veränderlichen erhält er Kurven für die Kreisfrequenz, welche diskutiert werden. In analoger Weise entstehen Kurven für die primäre und für die sekundären Dämpfungen und für die Ströme. Verf. faßt schließlich alle theoretisch möglichen Fälle in einer Tabelle zusammen. Ein Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigt eine befriedigende Übereinstimmung. *Strutt.*

Mercier, J., et P. Loudette: Étude de la stabilité des oscillations entretenues dans un système de deux circuits couplés. 2. J. Phys. Radium, VIII. s. 4, 197—203 (1943).

An Stelle des im ersten Teil dieser Arbeit betrachteten Sekundärkreises untersucht Verf. jetzt ein sekundäres Lecherdrahtsystem. Nach der Auseinandersetzung der Verhältnisse auf diesen Drähten wendet er sich dem Fall verschwindenden Widerstandes zu. Die Frequenzgleichung für diesen Fall wird kurvenmäßig dargestellt. Hierauf beschreibt er Versuche, welche eine Bestätigung der Rechenergebnisse in bezug auf die Schwingungsfrequenz als Funktion der Drahtlänge bringen. Als weitere Anwendung betrachtet er einen Schallerzeuger, der mit einer offenen Pfeife gekoppelt ist. Hier liegen analoge Verhältnisse vor, und Verf. gibt Experimentalkurven, welche wieder den obengenannten Verlauf zeigen, wobei die Zieherscheinungen in einigen Fällen besonders ausgeprägt sind. Insbesondere betrachtet er in diesen Fällen den Einfluß der Kopplung. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

### Optik:

Goos, F., und H. Hänchen: Über das Eindringen des totalreflektierten Lichtes in das dünnere Medium. Ann. Physik, V. F. 43, 383—392 (1943).

Die Arbeit beschäftigt sich erneut mit dem Problem der Totalreflexion. Die Verff. benutzen im wesentlichen eine Anordnung, wie sie auch von Quincke benutzt wurde. Zwei rechtwinklige Prismen, von denen das eine eine schwach kugelförmig konvex gekrümmte Hypotenusenfläche besitzt, berühren sich mit ihren Hypotenusenflächen. Die hierbei auftretenden Newtonschen Ringe, deren Intensitätsverteilung photographisch-photometrisch vermessen wird, ergeben die Dicke der Luftlamelle für die einzelnen Ringzonen. Wird jetzt mit dieser Prismenanordnung Totalreflexion an der ebenen Hypotenusenfläche erzeugt, so verschwinden die Newtonschen Ringe. Es bleibt nur der Zentralfleck übrig, der bedeutend größer ist als die kleine Berührungsfläche der beiden Prismen. Die Verff. weisen besonders darauf hin, daß auch beim Grenzwinkel der Totalreflexion die Wirkung so sei, als wenn der Energiefluß die Luftlamelle steil durchsetzt, so daß alle Mehrfachreflexionen und dementsprechend die Interferenzerscheinungen völlig ausgebildet werden — obwohl man doch sagt, daß der Energiefluß im dünneren Medium parallel zur Grenzfläche verläuft. Daß jetzt keine Newtonschen Ringe mehr zu sehen sind, liegt darin begründet, daß an der Grenze der Totalreflexion ihre Durchmesser unendlich groß geworden sind. Die Erscheinungen, die bei der Totalreflexion auftreten, werden eingehend photographisch-photometrisch ausgemessen. Die Ergebnisse dieser Messung werden tabellarisch zusammengestellt. Aus diesen Tabellenwerten geht hervor, daß der Fleck seine maximale Größe direkt an der Grenze der Totalreflexion hat, entgegen Aussagen einiger früherer Experimentatoren, die — bei Beobachtung mit dem Auge — angeben, daß der Fleck erst hinter der Grenze sein Maximum erreicht. Im letzten Paragraphen gehen die Verff. noch auf die mathematische Formulierung der als Interferenzphänomen gedeuteten Erscheinung ein, indem sie die im Gebiet der partiellen Reflexion geltenden Formeln für die durchgelassenen und reflektierten Lichtkomponenten auch nach Überschreiten der Grenze als gültig betrachten. *Picht* (Babelsberg).

Nikitine, S.: Théorie du photodichroïsme pouvant être produit dans des gels colorés, de coloration stable à la lumière. J. Phys. Radium, VIII. s. 4, 223—230 (1943).

Nach einer kurzen Einführung zeigt der Verf. im ersten Teil der Arbeit, der sich mit den theoretischen Entwicklungen beschäftigt, daß man einen Photodichroismus in gewissen gefärbten Gelen beobachten kann, die unter dem Einfluß des Lichtes ihre



Färbung nicht ändern, und die auch nicht ausbleichen. Der Mechanismus, der für das Auftreten des Photodichroismus verantwortlich ist, entspricht formell der Tatsache, daß ein Teilchen, das dichroitisch vorausgesetzt wird, verschwindet, nachdem es ein oder mehrere Lichtquanten absorbiert hat, und dafür ein anderes Teilchen auftritt, das im Mittel mit dem ersten identisch ist, aber gegen dieses willkürlich orientiert ist. Unter diesen Bedingungen ändert sich der Absorptionskoeffizient der Gesamtheit nur wenig unter dem Einfluß des Lichtes. — Im zweiten Teil wird der Versuch gemacht, die Theorie mit den Versuchsergebnissen von Kuhn und Erdoes und mit denen von Kondo zu vergleichen. Dieser Vergleich, der nur qualitativ durchgeführt werden kann, ist befriedigend. Ein quantitativer, aber etwas unsicherer Vergleich, der nur für einen speziellen Fall durchgeführt werden konnte, führt zu vernünftigen Größenordnungen. Wie der Verf. angibt, ist es aber notwendig, neue Versuche durchzuführen, um einen vollständigen quantitativen Vergleich zu ermöglichen. — Die bisher untersuchten Photodichroismen sind alle mit einem Ausblenden oder einer Farbänderung des untersuchten Mediums unter dem Einfluß des Lichtes verbunden. Die in der Arbeit gegebene Theorie erweitert also den Bereich der Untersuchungen über den Photodichroismus und erklärt in ausreichender Weise experimentelle Tatsachen, die bis jetzt unerklärbar geblieben waren. (Nach der Zusammenfassung des Verf.) *Picht.*

**Laue, M. v.:** Ein relativistischer Beweis für das Wiensche Verschiebungsgesetz. *Ann. Physik*, V. F. 43, 220—222 (1943).

Verf. zeigt an einem monochromatischen polarisierten Strahlenbündel, dem einfachsten thermodynamischen Strahlengedächtnis, aus dem z. B. die Hohlraumstrahlung durch Überlagerung folgt, die Gültigkeit des Wienschen Verschiebungssatzes auf Grund der Lorentz-Invarianz von  $E/\nu$ , der Entropie  $S$  und der Quantenzahl  $Z$ .

*Fritz Bopp (Berlin-Dahlem).*

## Atomphysik

### Statistik und kinetische Theorie der Materie:

● **Jordan, Pascual:** Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. 2. Aufl. (Die Wissenschaft. Hrsg. v. Wilhelm Westphal, Bd. 87.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1944. VI, 112 S. RM. 6.80.

Fast unveränderter Abdruck der ersten Auflage (dies. Zbl. 6, 235).

*J. Meixner (München).*

**Fürth, R.:** On the theory of the liquid state. 1. The statistical treatment of the thermodynamics of liquids by the theory of holes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37, 252—275 (1941).

Die „Löchertheorie“ der Flüssigkeiten, die in einer früheren Arbeit gemeinsam mit Ornstein und Milatz (dies. Zbl. 20, 326) begründet worden ist, wird mit Hilfe der klassischen, statistischen Mechanik weiter entwickelt. Nach dieser Theorie ist der flüssige Zustand durch das Vorhandensein elementarer Hohlräume (holes) gekennzeichnet, die infolge thermodynamischer Schwankungen entstehen und vergehen. Sie führen eine Art von Brownscher Bewegung aus. Die Größen der elementaren Hohlräume gehorchen einem bestimmten, statistischen Verteilungsgesetz derart, daß die Häufigkeit der größeren „Löcher“ mit abnehmendem Druck und steigender Temperatur immer mehr zunimmt. Verdampfung besteht in einer vollständigen Zerstörung des Systems durch die „Löcher“. Es wird angenommen, daß die Materie außerhalb der „Löcher“ ein Kontinuum darstellt mit der normalen Oberflächenspannung der Flüssigkeit und daß die „Löcher“ mit gesättigtem Dampf der entsprechenden Temperatur erfüllt sind. Es handelt sich also um eine Art Statistik von Dampfblasen in einer sonst idealen Flüssigkeit mit Oberflächenspannung. Die statistische Behandlung bezieht sich auf die Größe und Bewegung dieser „Dampfblasen“. Verf. weist darauf hin, daß diese Annahmen den mehr provisorischen Charakter der Theorie bedingen und die numerischen Resultate

daher mehr oder weniger bloße Größenordnungen darstellen können. Für die Energie, welche zur Bildung eines kugelförmigen Hohlraumes erforderlich ist, wird  $E_q = \frac{4}{3} \pi r^3 (p - p_0) + 4 \pi r^2 \sigma$  gesetzt, wobei  $p$  den äußeren Druck,  $p_0(T)$  den Druck des gesättigten Dampfes und  $\sigma(T)$  die Oberflächenspannung der Flüssigkeit bedeuten. Die Gesamtenergie wird zu  $E = E_q + \frac{1}{2} m_1 \cdot (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot p_r^2$  angenommen, wobei nach der klassischen Hydrodynamik  $m_1 = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho$  und  $m_2 = 4 \pi r^3 \rho$  gesetzt wird. Mit diesem Ausdruck für  $E$  wird die Zustandswahrscheinlichkeit  $w \sim e^{-E/kT}$  berechnet. Damit können alle interessierenden, auf die elementaren Hohlräume bezüglichen Mittelwerte, wie mittlere Größe, Energie usw., berechnet werden. Die Diskussion des so erhaltenen Zusammenhanges zwischen  $p - p_0$  und mittlerem Hohlraumvolumen  $v$  ergibt eine Deutungsmöglichkeit des Zustandes der Überhitzung und von kritischem Druck und kritischem Volumen. Die Berechnung des Gesamtvolumens und der Gesamtenergie der Löcher unter statistischer Berücksichtigung möglicher „Schwarmbildungen“ ergeben ein Verständnis für die numerischen Werte der Schmelz- und Sublimationswärmen und der Volumenänderung beim Schmelzen. Weiter werden Kompressibilität, Ausdehnungskoeffizient und die spezifischen Wärmen diskutiert. Der Vergleich mit dem zugänglichen Beobachtungsmaterial zeigt, daß die theoretischen Ergebnisse mit der Erfahrung im Einklang stehen.

Glaser (Prag).

Fürth, R.: On the theory of the liquid state. 2. Application of the hole theory to superheated liquids and supersaturated solutions of gases in liquids. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 276—280 (1941).

Die Theorie des flüssigen Zustandes auf Grund der Annahme elementarer Flüssigkeits Hohlräume hat auf die Existenz eines metastabilen Zustandes der Flüssigkeit geführt, welcher mit dem Zustand der Überhitzung identisch ist. Die hauptsächlichsten Eigenschaften desselben, wie Abhängigkeit von der Oberflächenspannung, der Temperatur und den Gefäßwänden, können auf diese Weise verstanden werden. Eine Theorie der Übersättigung von Gasen in Flüssigkeiten wird auf der gleichen Grundlage entwickelt.

Glaser (Prag).

Fürth, R.: On the theory of the liquid state. 3. The hole theory of the viscous flow of liquids. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 281—290 (1941).

Auf Grund der Vorstellung, daß die regellose „Brownsche Bewegung“ der „Löcher“ einen Transport von Bewegungsgröße durch benachbarte Flüssigkeitsschichten bewirkt, wird der absolute Wert des Zähigkeitskoeffizienten  $\eta$  und das Gesetz seiner Temperaturabhängigkeit hergeleitet. In der Ausgangsformel  $\eta = \frac{1}{3} \mu \bar{c} \lambda$  tritt hier an Stelle der mittleren freien Weglänge  $\lambda$  das Produkt aus mittlerer Geschwindigkeit  $\bar{c}$  und mittlerer Lebensdauer  $\tau$  eines elementaren Hohlraums, welche als Funktion von  $T$  berechnet wird. Die Ergebnisse der Theorie werden durch die Erfahrung bestätigt. W. Glaser.

Wergeland, H., and K. Hove-Storhoug: Gibbs' phase integral for separate systems. A contribution to the theory of Einstein's condensation phenomenon. 1. Norsk Vid. Selsk., Forh. 15, 131—134 (1943).

Die freie Energie  $\psi$  eines der Bose-Einstein-Statistik genügenden Partikelsystems wird ermittelt gemäß

$$(1) \quad e^{-\frac{\psi}{kT}} = \sum' e^{-\frac{\sum n_s \varepsilon_s}{kT}},$$

wo  $\varepsilon_s$  der  $s$ -te Energieeigenwert einer Einzelpartikel,  $n_s$  die Zahl der Partikel im  $s$ -ten Quantenzustand,  $k$  die Boltzmannsche Konstante und  $T$  die abs. Temperatur ist. Der Strich an der Summe bedeutet, daß nur über solche  $n_s$ -Werte summiert werden darf, die der Bedingung  $\sum_{(s)} n_s = N$  genügen, wo  $N$  die Gesamtzahl aller Partikel des

Systems ist. Die Nebenbedingung wird nun berücksichtigt durch Einführung eines diskontinuierlichen Faktors (Diracsche  $\delta$ -Funktion)

$$\delta(N - \sum n_s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} dt \cdot e^{-t(N - \sum n_s)}.$$



Die Einführung dieses Faktors in (1) führt ohne weiteres, wenn noch die Verteilung der Energiewerte der Translation berücksichtigt wird und diese so eng liegen, daß die Summation durch eine Integration ersetzt werden darf, zu einem Integralausdruck für die freie Energie.

K. Schäfer (Göttingen).

Wergeland, H., and K. Hove-Storhoug: Calculation of the isotherm for a degenerate gas. A contribution to the theory of Einstein's condensation phenomenon. 2. Norske Vid. Selsk., Forh. 15, 135—138 (1943).

Von den Verff. war ein Integralausdruck für die freie Energie eines Bose-Einstein-Gases erhalten worden (vgl. vorstehenden Bericht) von der Gestalt

$$\psi = -kT \ln \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dt e^{-Nt + \frac{V}{\lambda^3} \xi(5/2, t)}, \quad \sigma < 0$$

wo  $V$  das Volumen,  $N$  die Zahl der Gasteilchen,  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$ ,  $m$  die Masse der

Gasteilchen bedeutet und  $\xi(s, t)$  eine Abkürzung für  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^s}$  ist. Durch Entwicklung

des Integrals nach der Sattelpunktmethode kann gemäß der thermodynamischen Beziehung  $p = -\partial\psi/\partial V$  der Druck und damit die Isotherme des Gases erhalten werden. Es ergibt sich, daß in der Nähe des Volumens  $V_c = N\lambda^3 \xi(3/2, 0)^{-1}$  der Druck praktisch nicht vom Volumen abhängt, was gleichbedeutend mit der „Kondensation“ des Bose-Einstein-Gases ist.

K. Schäfer (Göttingen).

### Kristallbau und fester Körper:

Haul, R.: Energie und Ordnungszustand der Atome in Oberflächen flüssiger und fester Stoffe. Z. Phys. Chem. Abt. B 53, 331—361 (1943).

Die Oberflächenenergie  $\Sigma_M$ , die zur Vergrößerung einer Oberfläche um eine Fläche, auf der  $N_L$  (Loschmidtsche Zahl) Molekeln Platz finden, benötigt wird, läßt sich aus der entsprechenden Oberflächenspannung  $\sigma_M$  und ihrem Temperaturkoeffizienten nach Gibbs-Helmholtz zu

$$\Sigma_M = \sigma_M - T \frac{\partial \sigma_M}{\partial T}$$

berechnen. Nach dem ersten Hauptsatz ist die innere Verdampfungswärme  $\lambda_i = \lambda'_i + \Sigma_M$ , wenn  $\lambda'_i$  die Energie zur Entfernung der Oberflächenmolekeln in den Dampfraum bedeutet. Es kann nun  $\lambda'_i/\lambda_i = Z'/Z$  gesetzt werden, wo  $Z'$  bzw.  $Z$  die Zahl der unmittelbaren Nachbarmolekeln einer Oberflächen- bzw. Innenmolekel ist, wenn nur der Einfluß der Übernachbarn vernachlässigbar ist; eine Abschätzung ergibt, daß diese Voraussetzung meist mit genügender Annäherung erfüllt ist, so daß sich aus  $Z'$  und  $Z$  gemäß

$$\frac{Z}{Z-Z'} = \frac{\lambda_i}{\Sigma_M}$$

auf etwa 2% das richtige Verhältnis  $\lambda_i/\Sigma_M$  ergibt. Bei Kristallen kann dann unter der Annahme eines idealen Gitters die Oberflächenenergie auf den verschiedenen Flächen berechnet werden, wobei sich ergibt, daß bei kubisch raumzentrierten, flächenzentrierten bzw. hexagonalen Anordnungen die (110); (111) bzw. 0001 Ebenen diejenigen der geringsten Oberflächenenergie sind. Bei Flüssigkeiten kann man aus dem experimentell ermittelten Wert von  $\lambda_i/\Sigma_M$  einen Rückschluß auf den Ordnungsgrad (als Nahordnung verstanden) an der Oberfläche ziehen. Sind die Fehlstellen gleichmäßig im Innern und über die Oberfläche verteilt, so sollte man für  $\lambda_i/\Sigma_M$  bei Flüssigkeiten Werte in der Nähe von 4 und darüber erwarten, wenn man die entsprechenden  $Z$ - und  $Z'$ -Werte beachtet. Da nun bei den van der Waalsschen Flüssigkeiten  $\lambda_i/\Sigma_M$ -Werte von etwa 2,5 gefunden werden, so wird daraus geschlossen, daß bei diesen der Fehl Ordnungsgrad an

der Oberfläche größer als im Innern ist. Der umgekehrte Fall kann dagegen bei den Metallen angenommen werden, da bei diesen  $\lambda_i' \Sigma_M \approx 6$ . Die Oberflächenentropie bei festen Stoffen kann einerseits aus Modellbetrachtungen über die Bewegung (Oszillation) der Oberflächenmolekeln entnommen werden, indem man für den Oszillator die bekannten Entropiebeziehungen einsetzt. Zum andern kann aber mit einer gewissen Berechtigung

$$\left(\frac{S' - S}{S}\right)_{\text{fest}} = \left(\frac{S' - S}{S}\right)_{\text{flüssig}}$$

gesetzt werden, wo  $S'$  und  $S$  die Entropien an der Oberfläche bzw. im Innern sind. Da in der Flüssigkeit  $S \sigma_M = -\frac{\partial \sigma_M}{\partial T} = S' - S$  gilt, läßt sich  $S'_{\text{fest}}$  bestimmen.  $S'_{\text{fest}} < S'_{\text{flüssig}}$  ergibt sich sowohl experimentell als aus der Überlegung, daß die Unordnung in der Flüssigkeitsoberfläche größer als im zugehörigen Kristall ist. Bei Kenntnis von Energie und Entropie ist natürlich auch die freie Oberflächenenergie bestimmbar.

K. Schäfer (Göttingen).

Finbak, Chr.: The structure of liquids. 1: The scattering of X-rays from gases liquids, and solids. Avh. Norske Vid. Akad., Oslo 1943, 1—16 (Nr 3).

Verf. gibt eine übersichtliche Darstellung des Zusammenhanges zwischen beobachtetem Streudiagramm und der Elektronen-, Atom- und Molekülverteilung in der untersuchten Substanz bei der Streuung von Röntgenstrahlen an Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern.

Maeue (München).

Stranski, I. N.: Über die Thomson-Gibbssche Gleichung und über die sogenannte Theorie der Verwachsungskonglomerate. Z. Kristallogr. 105, 91—123 (1943).

Mittels eines thermodynamischen Kreisprozesses wird die Thomsonsche (Näherungs-)Gleichung für Flüssigkeitstropfen (Radius =  $r$ )

$$p_r = p_{\infty} \cdot e^{2M\sigma/rRT}$$

( $p_r$  = Tröpfchendampfdruck,  $M$  = Molekulargewicht,  $\sigma$  = freie Energie pro  $\text{cm}^2$  der Oberfläche,  $\rho$  = Dichte,  $R$  = Gaskonstante,  $T$  = absolute Temperatur) abgeleitet; hierauf unter Berücksichtigung der Gibbsschen Bedingung  $\sum F_i \sigma_i = \min$  die Übertragung auf den Kristall vorgenommen,  $\ln \frac{p_r}{p_{\infty}} = \frac{2V\sigma}{RT}$ , was schließlich zur allgemeinen Thomson-Gibbsschen Gleichung (unter Vernachlässigung der Kantenenergien)

$$\frac{RT}{2V} \ln \frac{p_r}{p_{\infty}} = \frac{\sigma_1}{r_1} = \frac{\sigma_2}{r_2} = \dots = \frac{\sigma_i}{r_i} = \dots$$

führt. Damit ist auch die Wulffsche Konstruktion der Gleichgewichtsform gegeben: Fällt man von einem Punkt im Kristallinnern die Lote auf alle möglichen Begrenzungsflächen, trägt danach von dem Punkt Strecken ab, die den zugehörigen  $\sigma_i$ -Werten proportional sind, und legt durch die erhaltenen Punkte die Normalebenen, so ist der von diesen begrenzte innere Körper die gesuchte Gleichgewichtsform. — Es wird noch eine zweite Ableitung obiger Gleichung mit Hilfe der Abtrennungsarbeiten einzelner Bausteine ausgeführt und als Anwendung die sog. Theorie der Verwachsungskonglomerate (D. Balaraew) und deren Begründung besprochen und gezeigt, „daß sie durchweg auf elementaren Fehlern und Unklarheiten beruht“. W. Nowacki (Bern).

## Elektronentheorie:

Borgnis, F., und E. Ledinegg: Zur Theorie des dichtemodulierten Elektronenstrahls bei endlicher Stromdichte. Ann. Physik V. F. 43, 296—312 (1943).

Treten Elektronen mit zeitlich schwankender Austrittsgeschwindigkeit durch eine „Steuerlinse“, so entsteht längs des Strahles eine veränderliche Elektronendichte. An den Überholungsstellen wird die Stromdichte unendlich, man spricht von einem „Brennpunkt“. In der Arbeit wird der Einfluß der Raumladungskräfte auf diese Fokussierung



in einem solchen dichtemodulierten Elektronenstrahl untersucht. Infolge der abstoßenden elektrischen Kräfte im Strahl gibt es eine „kritische Stromdichte“  $j_k$ , bei deren Überschreitung die Raumladungskräfte eine gegenseitige Einholung der Strahlelektronen verhindern. Der Wert dieser kritischen Stromdichte, oberhalb derer keine Fokussierung mehr im üblichen Sinne stattfindet, wird für eine sinusförmige Steuerspannung angegeben, ebenso eine Abschätzung, bei welchen Stromdichten die Raumladungskräfte vernachlässigt werden können. Für Stromdichten unterhalb  $j_k$  werden die Fokussierungsverhältnisse untersucht. Für Stromdichten oberhalb  $j_k$  wird für kleine Aussteuerungen Lage und Größe der Maximalwerte der Amplituden von Grund- und Oberwellen der Stromdichte angegeben.

W. Glaser (Prag).

**Siegbahn, Kai: Formation of image in a strong magnetic lens.** Ark. Mat. Astron. Fys. 30 A, Nr 1, 1—12 (1944).

Die Polschuhfelder in magnetischen Linsen haben einen typisch glockenförmigen Verlauf, der sich mit guter Annäherung durch Ausdrücke der Gestalt  $H(z) = H_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{a} \right)^2 \right]^\mu$  wiedergeben läßt. Für  $\mu = 1$  lassen sich die dazugehörige Differentialgleichung der abbildenden Elektronenbahnen geschlossen integrieren und damit alle optischen Konstanten, insbesondere die Brennweite  $f$  und die Brennpunktskoordinaten  $z_f$ , streng berechnen. Mit dem die Linsenstärke kennzeichnenden Parameter  $k^2 = eH_0^2 a^2 / gmU$  lauten diese:  $z_f = a \operatorname{ctg} \pi / \sqrt{k^2 + 1}$  und  $a/f = \sin \pi / \sqrt{k^2 + 1}$ .

Für  $\mu \rightarrow \infty$  geht das obige Glockenfeld in  $H = H_0 e^{-\left(\frac{z}{b}\right)^2}$  über, welches gerade den Feldverlauf unterhalb der Sättigungsgrenze gut wiedergibt. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß sich die obigen von Glaser angegebenen Formeln mit guter Näherung auch auf den Fall  $\mu \neq 1$  übertragen lassen. Denn der Einfluß des Feldes ist gerade in der Nähe seines Maximums, also für  $z/a < 1$ , am größten. Hier aber kann man für die obigen Felder schreiben  $H(z) = H_0/[1 + (z/a)^2]^\mu = H_0/[1 + \mu(z/a)^2]$

bzw.  $H(z) = H_0 e^{-\left(\frac{z}{b}\right)^2} = H_0 / e^{\left(\frac{z}{b}\right)^2} = H_0/[1 + (z/b)^2]$ . Man hat daher für  $\mu \neq 1$  in den angegebenen Formeln nur  $a$  durch  $a/\sqrt{\mu}$  zu ersetzen, so daß man mit dem alten  $k^2$ -Wert erhält:  $a/f = \sqrt{\mu} \sin \pi / \sqrt{k^2/\mu + 1}$ ,  $z_f = a/\sqrt{\mu} \operatorname{ctg} \pi / \sqrt{k^2/\mu + 1}$ , während für das Feld

$H = H_0 e^{-\left(\frac{z}{b}\right)^2}$  unmittelbar die oben angeführten Formeln gelten, wenn man  $a$  durch  $b$  ersetzt. An einem unmittelbar ausgemessenen Polschuhfeld, das bei der Konstruktion eines  $\beta$ -Spektrographen verwendet wurde (Ark. Mat. Astron. Fys. 28, 17), wird gezeigt,

daß der Feldverlauf am besten durch  $H = H_0 e^{-\left(\frac{z}{b}\right)^2}$  dargestellt wird und daß die angegebenen Formeln die gemessenen Werte bis auf einen Fehler von nur  $3^{00}/_{00}$  wiedergeben. Zum Schluß wird im Zusammenhang mit der Frage des erreichbaren Auflösungsvermögens des Spektrographen die sphärische Aberration größenordnungsmäßig abgeschätzt und an der Fokussierung der  $F$ -Linie von Th. B. gemessen.

W. Glaser (Prag).

**Schumann, W. O.: Über räumlich periodische Verteilungen frei fallender Ionen und Elektronen.** Z. Physik 121, 629—646 (1943).

Die Arbeit enthält eine ausführliche Diskussion der Lösungen der Raumladungsgleichung  $d^2U/dx^2 = a/4\sqrt{U_a + U} - b/4\sqrt{V_a - U}$  ( $a, b, U_a$  und  $V_a$  sind Konstante), soweit sie ohne zweite Integration der Differentialgleichung gegeben werden kann. Die Darstellung der Lösungen mit Hilfe elliptischer Integrale soll in einer späteren Veröffentlichung eines Mitarbeiters nachgetragen werden. Die für kleine Schwankungen von  $U$  folgenden Näherungslösungen führen zu trigonometrischen Funktionen, welche die Möglichkeit räumlich periodischer Verteilungen von Ionen- und Elektronendichten unmittelbar zum Ausdruck bringen.

W. Glaser (Prag).

**Walcher, W.:** Der Einfluß der Raumladung auf die Abbildungseigenschaften magnetischer Sektorfelder. *Z. Physik* **121**, 719—728 (1943).

Die Arbeit gibt eine Erweiterung der Herzogischen Theorie der Abbildungseigenschaften magnetischer Sektorfelder mit Berücksichtigung des abstoßenden Einflusses der Raumladung. Die Fokussierungsbedingungen eines ebenen Elektronenbündels von homogener Geschwindigkeit und Masse werden für den feldfreien Raum und für magnetische Sektorfelder angegeben. Auf die Erweiterung der Theorie auf elektrisch-magnetische Sektorfelder unter Berücksichtigung einer Massen- und Geschwindigkeitsstreuung wird kurz eingegangen und als Beispiel ein massen-homogener Strahl mit Geschwindigkeitsstreuung im Magnetfeld behandelt.

*W. Glaser (Prag).*

**Schwartz, E.:** Über den Einfluß der Raumladung auf die Schärfe von Braunschen Fernschröhren. *Physik. Z.* **44**, 348—366 (1943).

Die bekannten Formeln für die gegenseitige Beeinflussung schwach konvergierender Elektronenstrahlen infolge eigener Raumladung werden neuerlich hergeleitet und auf die Begrenzung der Fleckschärfe bei Braunschen Röhren angewandt. Der Zusammenhang von kleinstem Strahlquerschnitt und raumladungsbedingter Verlagerung der Brennebene mit Strom und Spannung wird kurvenmäßig dargestellt und für die bekanntesten der bisher entwickelten Typen von Fernschröhren werden für eine gegebene Zeilenzahl die kritischen Werte der Spannung, bei denen der raumladungsbedingte Flechtdurchmesser gleich dem Zeilenabstand wird, berechnet. Schließlich wird auch der Raumladungs-Einfluß auf das Querschnittsminimum vor der Kathode abgeschätzt. Es ergibt sich, daß die Raumladungskräfte auf die erreichbare Fleckschärfe in Kathodenstrahlröhren bisher nur geringen Einfluß hatten.

*W. Glaser (Prag).*

**Glaser, Walter:** Bildentstehung und Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops vom Standpunkt der Wellenmechanik. *Z. Physik* **121**, 647—666 (1943).

Der Verf. weist — wie auch vom Referenten bereits geschehen — darauf hin, daß die bisherigen Untersuchungen zur Bestimmung der Auflösung eines Elektronenmikroskops nur zu näherungsweise richtigen Ergebnissen führen können, und daß es notwendig sei, die Untersuchungen in Analogie zu den entsprechenden wellen- und beugungstheoretischen Untersuchungen des Auflösungsvermögens der optischen Abbildung durchzuführen. Er bringt daher eine kurze Wiederholung der einschlägigen wellen- und beugungstheoretischen Betrachtungen, wie sie insbesondere für Kugelwellen durch Debye, für mit Aberrationen behaftete Wellen durch den Referenten durchgeführt wurden. Für die Auswertung der hierbei auftretenden Integralausdrücke ist die mathematische Darstellung gewisser physikalischer Größen erforderlich, so z. B. die Gleichung der Wellenfläche bei vorliegender sphärischer Aberration, die der Verf. gleichfalls noch einmal ableitet (vgl. J. Picht, dies. Zbl. **1**, 93). Es folgen Überlegungen über die für die Auswertung des Integrals gleichfalls erforderliche dingseitige Strahlungscharakteristik und über den Zusammenhang zwischen dingseitiger und bildseitiger Strahlneigung. Hier gibt der Verf. eine Gleichung — deren Beweis bei späterer Gelegenheit gebracht werden soll —, die sehr gut erkennen läßt, wie in dem die Abweichung von der Erfüllung der Sinusbedingung angehenden Ausdruck die sphärische Aberration sowie der Komafehler verbunden auftreten, so daß — wie bekannt — bei behobener sphärischer Aberration die Erfüllung der Sinusbedingung die Aufhebung des Komafehlers zur Folge hat. Der Verf. gibt sodann eine Auswertung des Beugungsintegrals für die Gaußsche Bildebene und einige graphische Darstellungen der Elektronenintensität in der Nähe der Kaustikspitze als Funktion des Abstandes und eines die Größe der Aberration angehenden Parameters sowie eine Darstellung, die in Abhängigkeit von den gleichen Größen Aussagen über das Auflösungsvermögen gestattet.

*Picht (Babelsberg).*



**Reichel, Wilhelm:** Vergleichende Untersuchungen über den Einfluß der Stegform auf die Wirkungsweise und den Nutzeffekt von Prallgittervervielfachern. Physik. Z. 44, 279—296 (1943) u. Berlin: Diss. 1943.

Verf. gibt zunächst einen Überblick der bekannten Daten bezüglich der Austrittsgeschwindigkeit und der Richtungsverteilung der Sekundärelektronen. Als Prallgitter wird eine streifenförmig durchbrochene Folie angenommen, deren Spannung gleich dem örtlichen Potential des Feldes ist. Somit wird das Feld nicht gestört und bleibt homogen. Aus der Parabelbahngleichung der Elektronen ergibt sich die Reichweite. Hierauf wendet Verf. sich der Dichteverteilung der Elektronen in jedem Punkt der Potentialfläche zu. Für verschiedene Stegbreiten wird der Anteil der Nutzsekundärelektronen ermittelt. Der Einfluß des Bedeckungsfaktors bei kleiner Stegbreite im Verhältnis zur Reichweite wird unter Berücksichtigung verschiedener Anfangsgeschwindigkeiten diskutiert. Hierauf wendet Verf. sich dem Einfluß der Dicke der Stege auf die Zahl der nutzbaren Sekundärelektronen zu, berücksichtigt die Einfallrichtung der Primärelektronen, betrachtet quadratische Steggitter, Gitter mit senkrechten Stegen, Gitter mit Stegen von rundem Querschnitt und vergleicht zum Schluß alle betrachteten Anordnungen für den Fall, daß die Reichweite groß gegen die Stegbreite ist.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

### Nicht-relativistische Quantentheorie:

**Laue, Max von:** Energiesatz und neuere Physik. Forsch. u. Fortschr. 19, 98—99 (1943).

Kurzer Bericht über die Geschichte des Energiesatzes und seine Anwendungen in der Atomphysik.

*C. F. v. Weizsäcker* (Straßburg).

**Hole, Njål:** Über eine Potentialfunktion, die eine exakte Integration der Schrödinger-Gleichung gestattet. Norske Vid. Selsk., Forh. 13, 139—142 (1941).

Für eine bestimmte verwickelte Potentialfunktion wird die eindimensionale Schrödinger-Gleichung exakt gelöst.

*F. Hund* (Leipzig).

**Hole, N.:** Eigenwertbestimmung in der Wellenmechanik durch die Polynommethode. Norske Vid. Selsk., Forh. 14, 51—54 (1942).

Angabe einiger Fälle, wo die Polynommethode zum Ziele führt.

*F. Hund*.

**Viard, Jeannine:** Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable en mécanique ondulatoire. Disquisit. math. et phys., Bucureşti 3, 131—140 (1943).

Verf. untersucht das Verhalten eines wellenmechanischen Systems in der Umgebung eines Minimums der potentiellen Energie (also einer klassischen stabilen Gleichgewichtslage) unter der Voraussetzung, daß die Lage nur wenig vom Gleichgewicht abweicht. Potentielle und kinetische Energie werden dann rein quadratische Formen der Koordinaten bzw. Impulse. Bringt man diese Formen durch eine Koordinatentransformation auf Hauptachsen, dann läßt sich die Wellengleichung separieren und führt in jeder Koordinate auf die Gleichung des harmonischen Oszillators.

*W. Franz* (München).

**Fernández Alonso, José Ignacio:** Das Potential der Wechselwirkung zwischen zwei Atomen. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 37, 73—94 (1943) [Spanisch].

**Finke, W.:** Bemerkungen zu G. Haenzel: „Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente“. Z. Physik 121, 586—587 (1943).

1. Die von Haenzel (vgl. dies. Zbl. 28, 40) angegebene Verteilung der Elemente auf der Polygonfläche muß nach neueren Angaben eine Änderung erfahren. 2. Die Polygonfläche wird durch eine sehr übersichtliche dreidimensionale Anordnung der Elemente ersetzt, die aus sieben übereinandergelegenen Kreisebenen mit gemeinsamer senkrechter Achse besteht. Die Hauptquantenzahl  $n = 1, 2, \dots, 7$  bezieht die einzelnen „Stockwerke“, die Nebenquantenzahl  $l = 0, 1, 2, 3$  die konzentrischen Kreise in diesen Stockwerken, die magnetische Quantenzahl  $m_l = -l, -l + 1, \dots, +l$  die Radien in diesen Kreisen. In jedem Kreisring liegen auf jedem Radius zwei Punkte, die Elek-

tronen mit entgegengesetztem Spin darstellen, und diese Punkte werden mit den Nummern der Elemente des periodischen Systems bezeichnet. *van der Waerden.*

**Biermann, L.:** Die Oszillatorenstärken einiger Linien in den Spektren des Na I, K I und Mg II. *Z. Astrophys.* **22**, 157—164 (1943).

Da bei der Berechnung von Termwerten und Eigenfunktionen schwerer Atome nach Hartree und Fock der Einfluß der Polarisierung des Atomrumpfes doch nur sehr angenähert berücksichtigt werden kann, wird hier die Eigenfunktion des Leuchtelektrons durch Lösung der gewöhnlichen Schrödinger-Gleichung für ein Elektron mit einem Potential gewonnen das aus dem ohne Austausch gerechneten Hartree-Potential durch Anbringen geeigneter Parameter abgeleitet ist. Mit sehr umfangreichen Rechnungen werden so die Oszillatorenstärken der wichtigsten Linien des Na I, K I und Mg II berechnet. *F. Hund* (Leipzig).

**Sauter, Fritz:** Gibt es Dichtemaxima der freien Elektronen im Metallgitter? *Naturwiss.* **31**, 302—303 (1943).

Solange man die Elektronen in einem Metall nach den Regeln der Statistik behandeln kann (also nicht notwendig bei strenger Lösung der Schrödinger-Gleichung), gibt es keine Dichtemaxima zwischen den Ionen. *F. Hund* (Leipzig).

**Koppe, Heinz:** Eine Näherungsmethode zur Berechnung der magnetischen Suszeptibilität. *Z. Physik* **121**, 614—628 (1943).

Im Gegensatz zur üblichen Berechnungsmethode der magnetischen Suszeptibilität höherer Atome, bei der aus den (Hartreeschen) Eigenfunktionen des Atoms das mittlere Abstandsquadrat und daraus die Suszeptibilität berechnet wird, bestimmt Verf. zunächst die durch das angelegte Magnetfeld gestörten Eigenfunktionen beim Wasserstoff und berechnet daraus durch ein weiteres Näherungsverfahren die Störung der Eigenfunktionen infolge der Wechselwirkung der Elektronen untereinander. Dieses Verfahren ist deshalb brauchbar, weil Verf. die durch das Magnetfeld gestörten Eigenfunktionen des Wasserstoffs nicht, wie sonst üblich, in Form einer Reihenentwicklung über alle Eigenfunktionen des ungestörten Problems erhält, sondern einen geschlossenen Ausdruck für das zum Quadrat der magnetischen Feldstärke proportionale Zusatzglied zur Eigenfunktion angeben kann. Auf diese Weise erhält Verf. Werte für die Suszeptibilität von Helium, welche mit den experimentellen Werten besser übereinstimmen, als die bisherigen theoretischen Resultate. Nach der gleichen Methode berechnet Verf. auch die Suszeptibilität des Wasserstoffatoms in höherer Näherung (Entwicklung nach Potenzen des Magnetfelds) und die Suszeptibilität von Ionen in Kristallen. *Sauter.*

**Kronig, R., und J. Korrington:** Zur Theorie der Bremsung schneller geladener Teilchen in metallischen Leitern. *Physica*, Haag **10**, 406—418 (1943).

Behandelt man die Metallelektronen als frei oder nur durch ein periodisches Potential gebunden, so bremsen sie durch das Metall tretende geladene Teilchen unendlich stark. Dieser Fehler wurde vom Ref. [*Ann. d. Phys.* **17**, 869 (1933)] durch die Berücksichtigung der Reibung der Metallelektronen am Gitter der Metallatome, die sich im Ohmschen Widerstand äußert, behoben. Die Verff. betrachten statt dessen die innere Reibung des Elektronengases, deren Koeffizienten sie nach Formeln der kinetischen Gastheorie unter Annahme einer freien Weglänge von der Größenordnung des Atomradius zu etwa  $0,75 \cdot 10^{-5}$  cgs-Einheiten abschätzen. Sie stellen die hydrodynamische Bewegungsgleichung des Elektronengases mit dieser inneren Reibung auf und berechnen die von einer durch dieses Gas mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Ladung pro Zentimeter Weg geleistete Arbeit. Die Reibung mit dem Gitter kann nach dieser Rechnung neben der inneren Reibung vernachlässigt werden. Der Vergleich mit der Erfahrung für Li scheint die angenommene Größe der inneren Reibung zu bestätigen. Für Supraleiter muß auch die innere Reibung verschwinden. Die Temperaturabhängigkeit der beobachteten Bremsung sollte eine Entscheidung zwischen innerer oder Gitterreibung (nur letztere ist temperaturabhängig) ermöglichen.

*C. F. v. Weizsäcker* (Straßburg).



**Artmann, Kurt:** Zur Theorie der anomalen Reflexion von Atomstrahlen an Kristalloberflächen. 4. Berücksichtigung des Energieaustausches zwischen Gitter und Teilchen. Z. Physik **119**, 137—153 (1942).

In Ergänzung dreier früherer Untersuchungen (dies. Zbl. **28**, 133) wird hier die anomale Reflexion von He-Strahlen an einem Kristallgitter unter Berücksichtigung einer möglichen Energieübertragung zwischen dem Kristall und dem reflektierten Teilchen untersucht. Dabei wird angenommen, daß alle Oberflächenatome des Kristalls mit der gleichen Phase und mit einer bestimmten Frequenz schwingen, so daß sich der ganze Kristall wie ein harmonischer Oszillator verhält und bei der Wechselwirkung mit einem He-Atom an dieses ein oder mehrere Energiequanten abgeben kann. Die unter dieser Vorstellung abgeleitete Gestalt der durch die anomale Reflexion bedingten Dellen stimmt mit der von Stern beobachteten überein. *Sauter (München).*

### Relativistische Quantentheorie:

● **Wentzel, G.:** Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. Wien: Deuticke 1943. IV, 208 S. RM. 20.—.

Beim heutigen Stand der theoretischen Forschung ist es ein gewagtes Unternehmen, eine lehrbuchartige Fassung unseres Wissens über die Quantentheorie der Wellenfelder zu schreiben, sind doch manche — im allgemeinen grundlegende Dinge — noch vielfach unsicher, so daß von einer befriedigenden Theorie nicht gesprochen werden kann. Doch scheinen andererseits die Schwierigkeiten derartig prinzipieller Art zu sein, daß ihre Beseitigung nicht in kurzer Frist zu erhoffen ist. Daher werden wir uns mit der heutigen Fassung der Quantentheorie der Wellenfelder vorläufig begnügen müssen. Wir werden sie kennen müssen, um schließlich ihre Schwierigkeiten zu meistern. Darin sieht Wentzel mit Recht die Notwendigkeit seines Buches. — Der Stoff ist im wesentlichen nach didaktischen Gesichtspunkten übersichtlich zusammengestellt. Er führt uns ausgehend vom kanonischen Formalismus zur Theorie der skalaren und vektoriellen Wellenfelder und weist vor allem in dem Abschnitt über Quantenelektrodynamik wie in einem abschließenden Ausblick nachdrücklich auf die ungelösten Fragen der dargestellten Theorie hin. Das Buch dürfte Physikern vom Fach ein sehr nützliches Nachschlagewerk sein. Alle diejenigen dagegen, die sich in dieses Gebiet einarbeiten wollen, müssen dem Verf. dankbar sein, daß er sie auf einem geraden Weg durch dieses bis heute sonst schwer zugängliche Gebiet hindurchführt. *K.-H. Höcker.*

**Pauli, W.:** Relativistic field theories of elementary particles. Rev. Modern Physics **13**, 203—232 (1941).

Zusammenfassender Bericht über den gegenwärtigen Stand der Feldtheorien (unter Ausschluß des Singularitätenproblems). — Erster Teil: Es werden die Transformationseigenschaften der Feldgleichungen untersucht. Aus der Existenz eines Variationsprinzips folgt die Gültigkeit des Energie-Impuls-Satzes. Die Lorentz-invarianz der Lagrange-Funktion führt zum Drehimpuls- und Schwerpunktssatz. Die Invarianz der Lagrange-Funktion gegen Phasenänderung bei komplexer Wellenfunktion liefert die Kontinuitätsgleichung, den Satz von der Erhaltung der Ladung. Im letzten Fall, bei komplexer Wellenfunktion und phaseninvarianter Lagrange-Funktion, kann man die dem Feld zugeordneten Quanten als geladene Partikel betrachten. Die Berücksichtigung der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld erfolgt durch Ersetzung der Ableitungen  $\partial/\partial x_R$  durch die Operatoren  $\partial/\partial x_R + i e q_R$ . Die Lagrange-Funktion ist jetzt invariant gegen eine örtlich und zeitlich variierende Phasenänderung bei gleichzeitiger und passend zugeordneter Änderung der Normierung des Viererpotentials (sog. „Eich“transformation erster bzw. zweiter Art). — Zweiter Teil: Die Eigenschaften spezieller Felder werden untersucht unter Einschluß der Quantelung. Die Betrachtung der Quanteneigenschaften beschränkt die Diskussion auf lineare Feldgleichungen ohne Wechselwirkung wegen der Singularitätsschwierigkeiten. Besonders werden die skalare und die vektorielle Theorie (Spin 0 und 1) und

die Diracsche Theorie des Elektrons (Spin  $1/2$ ) behandelt. Bemerkenswert ist die Diskussion der Vertauschungsrelationen. Diese bestimmen sich unter naheliegenden Voraussetzungen eindeutig bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der im wesentlichen das Plancksche Wirkungsquantum darstellt. Es wird gezeigt, daß mit dem Spin 0 und 1 nur die schiefssymmetrischen Vertauschungsrelationen verträglich sind, während man beim Spin  $1/2$  auch die symmetrischen zulassen kann und im Hinblick auf die Löchertheorie sich sogar auf diese beschränken muß. Die Löchertheorie wird im Anschluß an die Heisenbergsche Positronenarbeit dargestellt. Wichtig ist die Bemerkung, daß das magnetische Moment der Teilchen keineswegs durch den Spin festgelegt ist. Sowohl bei ganz- als auch bei halbzahligem Spin kann man zur Lagrange-Funktion Glieder hinzufügen, die mit verschwindendem äußeren elektromagnetischen Feld Null werden, die aber dennoch (auch im feldfreien Fall) einen Beitrag zum Viererstrom und damit zum magnetischen Moment des Teilchens liefern. Diese kann darum einen beliebigen Wert annehmen. Zum Schluß werden für hohe Energien und verschiedene Prozesse die nach den diskutierten Theorien zu erwartenden Wirkungsquerschnitte tabellenmäßig zusammengestellt. Man findet die Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Mesotronen an einem festen Coulombfeld, an einem urpränglich ruhenden Elektron und für die Comptonstreuung, die Bremsstrahlung und die Paarerzeugung.

*Fritz Bopp* (Berlin-Dahlem).

**Hylleraas, Egil A.: Potential walls and the so-called Klein paradox in relativistic quantum mechanics.** (Avh. Norske Vid.-Akad., Oslo I Nr 2.) Oslo: Jacob Dybwad 1943. 9 pag. nskr 1.50.

Die Durchtrittswahrscheinlichkeit durch eine hinreichend hohe Potentialschwelle in das Gebiet negativer Energien fällt mit abnehmender Steilheit der Potentialschwelle ab. Und zwar erhält man nur dann merkbare Durchgangswahrscheinlichkeiten, wenn der gesamte Potentialanstieg auf einer Strecke erfolgt, die kleiner ist als die Compton-Wellenlänge der Elektronen. Um die umständlichen Rechnungen zu vermeiden, die zur Ableitung dieses Resultates bei stetigem Potentialanstieg notwendig sind, ersetzt Verf. letzteren durch eine Doppelstufe und zeigt, daß auch durch diese Doppelstufe hindurch dann eine wesentliche Durchgangswahrscheinlichkeit besteht, wenn die beiden Stufen näher beieinander liegen als die Compton-Wellenlänge.

*Sauter* (München).

**Scherrer, W.: Über den Begriff des Atoms.** 4. Comment. math. helv. 16, 115—145 (1943).

Es werden Lösungen der Klein-Gordonschen relativistischen Wellengleichung gesucht, welche im vierdimensionalen Raum auf zwei übereinanderliegenden Punkten der Zeitachse Singularitäten haben entsprechend der „Randbedingung“, daß das betrachtete Teilchen an zwei verschiedenen Zeitpunkten sich mit Sicherheit im gleichen Punkt des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes aufhält. Eine solche Lösung wird in der Tat gefunden. Die ganze Arbeit dürfte wohl mehr mathematisches als physikalisches Interesse beanspruchen.

*Sauter* (München).

**Petiau, Gérard: Sur la représentation des interactions corpusculaires par l'intermédiaire de la particule de spin 1.** C. R. Acad. Sci., Paris 216, 832—834 (1943).

**Wergeland, Harald: Über die Struktur der Atomkerne.** Norske Vid. Selsk., Skr. 1941, Nr 1, 1—68 u. dt.-sch. Zusammenfassung 62—65 (1942) [Norwegisch].

Bericht mit wesentlichen selbständigen Erweiterungen der Theorie. Inhalt: I. Einführung. II. Das  $\alpha$ -Teilchen-Modell. III. Feldtheorie und Kernkräfte. IV. Mathematischer Anhang. In I. werden die Sättigungsbedingungen der Kernkräfte und die Äquivalenz der Auffassungen von Proton und Neutron als verschiedene Teilchen oder als Zustände desselben Teilchens abgeleitet. In II. wird versucht, die Wechselwirkung zweier  $\alpha$ -Teilchen zu berechnen. Durch geeignete Wahl der Eigenfunktionen wird zwar nicht die Gesamtenergie, wohl aber die Bindung zwischen den  $\alpha$ -Teilchen für  $Be^8$  etwa richtig dargestellt. Die gewählten Eigenfunktionen entsprechen einem „Disso-



ziationsgrad“ der  $\alpha$ -Teilchen von 25%. III. stellt die Yukawasche Theorie der Kernkräfte in möglichst enger Analogie zur Elektrodynamik dar. Der spinabhängige Teil des resultierenden Potentials zwischen zwei schweren Teilchen wird in Analogie zu der Spin-Spin-Kopplung gesetzt, die aus dem Breitischen Operator des Zweielektronenproblems folgt.

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

**Volz, Helmut:** Wirkungsquerschnitte für die Absorption langsamer Neutronen. Z. Physik 121, 201—235 (1943).

Verf. gibt eine systematische Untersuchung der Absorptionsquerschnitte von 49 Elementen durch Messung der Absorption der Substanzen in Wasser auf Grund einer Methode, die eine besondere Konstanz der Neutronenintensität im absorbierfreien Medium gewährleistet. Die Ergebnisse werden mit früheren Messungen verglichen. Unterschiede liegen meist in der Richtung des Ausgleiches der Absorptions- und Aktivierungsmessungen. Doch scheint der Unterschied an einigen Stellen gesichert (Ta und Bi) und auf das Vorhandensein zusätzlicher Absorptionsvorgänge hinzuweisen. Erstmessungen liegen vor bei Li, Be, Ti, Sr, Zr, Mo, Te, Hg. Die vergleichenden Tafeln der Wirkungsquerschnitte werden eine nützliche Grundlage für kernphysikalische Arbeiten sein.

Fritz Bopp (Berlin-Dahlem).

**Gehlen, J.:** Bestimmung des Einfangwirkungsquerschnittes von technischem Aluminium für langsame Neutronen. Z. Physik 121, 268—284 (1943).

Der Einfangquerschnitt von technischem Aluminium für thermische Neutronen wird durch Absorptionsmessung in Paraffin und durch Vergleich mit dem bekannten Einfangquerschnitt von Silber auf Grund der Aktivierung bestimmt. Es ergibt sich  $0,43 \pm 0,07$  bzw.  $0,19 \pm 0,02 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Der Unterschied könnte auf Beimengungen stark absorbierender Substanzen im technischen Reinaluminium oder auf unbekannte langlebige Aktivierungen zurückzuführen sein. Beiläufig wurden folgende Halbwertszeiten bestimmt: Ag  $33,2 \pm 2 \text{ sec}$ ,  $148,5 \pm 1,5 \text{ sec}$ ; Al  $140 \pm 2 \text{ sec}$ .

Fritz Bopp.

**Lyons, D.:** Die Energieverteilung der Neutronen in einer Mischung. Naturwiss. 31, 507—508 (1943).

In einer bremsenden Substanz seien in  $1 \text{ cm}^3$   $n_\kappa$  bremsende Atomkerne der Sorte  $\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ) mit den Streuquerschnitten  $\sigma_\kappa$  enthalten. Unter der Voraussetzung, daß die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte von der Neutronenenergie unabhängig sind, wird die Energieverteilungsfunktion  $N(E)$  der im stationären Zustand vorhandenen Neutronen, die mit einer Energie  $E_0$  dauernd erzeugt werden, berechnet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$Q \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) dy = - \sum_{\kappa} \sigma_{\kappa} n_{\kappa} \cdot v \cdot N(E) dE$$

( $Q$  = Zahl der pro Sekunde erzeugten Neutronen,  $f_n(y) dy$  = Verteilungsfunktion der Neutronen nach dem  $n$ -ten Stoß mit  $y = \ln(E_0/E)$ ,  $v$  Neutronengeschwindigkeit.) Es wird gezeigt, daß ein einzelnes Summenglied der linken Seite sich auf die Form

$$f_n(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{yz} \cdot \Phi(z)^n dz \quad \text{mit} \quad \Phi(z) = \frac{1 + \sum c_\kappa (1 - e^{-y\kappa})}{1 + z}$$

bringen läßt. Diese Ausdrücke lassen sich als geometrische Reihe aufsummieren und integrieren. Dann ergibt sich

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}^{(\sum \nu_\kappa = v)} (-1)^v \frac{c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \dots c_k^{\nu_k}}{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_k!} \cdot Y^{v-1} \cdot e^{cY} (v + (1+c)Y) \cdot \Delta,$$

wo  $c = \sum c_\kappa$ ,  $c_\kappa = g_\kappa \alpha_\kappa / (1 - \alpha_\kappa)$ ,  $g_\kappa = n_\kappa \sigma_\kappa / \sum n_i \sigma_i$ ,  $\alpha_\kappa = \left( \frac{m_\kappa - m}{m_\kappa + m} \right)^2$ ,  $Y = y - \sum \nu_\kappa y_\kappa$  mit  $y_\kappa = -\ln \alpha_\kappa$ ,  $\Delta = 1$  für  $Y > 0$ ,  $= 0$  für  $Y < 0$ . Für  $y \gg y_\kappa$  ( $\kappa = 1 \dots k$ )



wird daraus  $\sum f_n(y) = 1/(1 - \sum c_k y_k)$ . Dieser Ausdruck stellt die Dichte der Stoßpunkte eines Neutrons auf der  $y$ -Skala dar. Der allgemeinere Ausdruck (1) hat Unstetigkeitsstellen bei  $y = y_k$  ( $k = 1, \dots, k$ ).  
Volz (Berlin).

Opechowski, W.: Sur la vie moyenne des mésons du rayonnement cosmique. Physica, Haag 10, 473—480 (1943).

Vergleicht man die durch direkte Messung bestimmte Lebensdauer der Mesonen ( $\sim 1,5 \cdot 10^{-6}$  sec) mit derjenigen, die aus dem Verhalten der harten Komponente der Höhenstrahlung und aus den bisher bekannt gewordenen Werten für die Mesonmasse berechnet werden kann, so ergeben sich nach der zweiten Methode beträchtlich größere Werte ( $\sim 3 \cdot 10^{-6}$  sec). Wenn diese Diskrepanz nicht experimenteller Natur ist, wäre man zur Annahme gezwungen, daß die harte Komponente neben den eigentlichen Mesonen noch Teilchen größerer Lebensdauer ( $\gtrsim 10^{-3}$  sec) enthält. Möglicherweise sind die Teilchen Protonen. Verf. schätzt, daß etwa 50% der harten Komponente (in 2 km Höhe) stabil (oder quasi-stabil) sind.  
Fierz (Basel).

## Astrophysik

Ten Bruggencate, P.: Zur Lindblad'schen Rotations-Theorie der Milchstraße. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. H. 2, 49—90 (1943).

Gegenüber der Rotationstheorie der Milchstraße in der von Oort entwickelten Form, die von der doppelten Sinuswelle in den mittleren Pekuliargeschwindigkeiten (in Abhängigkeit von der galaktischen Länge) und von der besonderen Verteilung der Bewegungsrichtungen der sog. Schnellläufer unter den Sternen ausgeht, hat die schon vorher von Lindblad aufgestellte Theorie der Milchstraßenrotation weniger Beachtung in der Literatur gefunden. Verf. gibt eine ausführliche Darstellung der Kernpunkte bzw. der Grundlagen der Lindbladschen Theorie, die ihren Ausgangspunkt in der als Asymmetrie der Sternengeschwindigkeiten bekannten Erscheinung besitzt. Während die Oortsche Theorie eine größere Anschaulichkeit in ihrem Ausgangspunkt aufweist und vielleicht deshalb mehr Interesse fand, zeichnet sich die Theorie von Lindblad einmal durch größere Allgemeinheit, weiterhin aber auch dadurch aus, daß sie auf verhältnismäßig einfache Weise Abweichungen vom Gleichgewichtszustand zu untersuchen erlaubt. Ihre Grundlage bildet ein Diagramm, das die möglichen Kombinationen zwischen Gesamtenergie und Rotationsmoment für Sterne zur Darstellung bringt, die sich im allgemeinen Kraftfeld eines rotationssymmetrischen Sternsystems bewegen. Dementsprechend werden im ersten Teil der vorliegenden Arbeit die Eigenschaften dieses Lindblad-Diagramms ausführlich diskutiert, wobei eine sehr wesentliche, in der Literatur bisher nicht hervorgehobene Regel zur Bestimmung des peri- und apogalaktischen Abstandes einer Sternbahn aus den gegebenen Anfangsbedingungen mit Hilfe des Diagramms abgeleitet wird. Im zweiten Teil der Ausführungen wird ein spezielles Modell eines Sternsystems, das den wirklichen Verhältnissen weitgehend angepaßt ist, im einzelnen durchgerechnet.  
E. Rabe (Berlin).

Zwart, H. de: Versuch einer synthetischen Lösung des kosmogonischen Dilemmas. Astron. Nachr. 274, 18—21 (1943).

In der Kosmogonie des Planetensystems stehen sich zwei Grundhypothesen gegenüber, von denen die eine die Entstehung der Planeten als Folge der Rotation der Sonne betrachtet, während die andere sie auf die Einwirkung einer begegnenden Sonne zurückführt. Der Verf. stellt 18 Merkmale des Planetensystems zusammen und zeigt, daß die Rotationshypothese die Merkmale erklärt, die sich nur oder vorzugsweise bei den inneren Planeten und den regulären Monden finden, die Begegnungshypothese die Merkmale der äußeren Planeten und Monde. Er erwägt daher die Möglichkeit, beide Hypothesen zu vereinigen, indem man als maßgebliches Ereignis eine Begegnung annimmt und in ihrem Ablauf Rotationswirkungen zur Geltung kommen läßt.  
Kruse.



**Struve, Otto:** Extended stellar atmospheres: A review of the problems of gaseous shells. *Astrophys. J.* **95**, 134—151 (1942).

Allgemeine Diskussion des Problems. Drei Arten von Schichten werden beobachtet: eine stationäre umkehrende Schicht, darüber eine stationäre ausgedehnte Atmosphäre, und ganz außen eventuell noch eine sich ausdehnende Schicht nach Art der Novahüllen. Für den Aufbau der äußeren Schichten sind wesentlich vor allem die Rotation des Sterns und der Strahlungsdruck in der  $L\alpha$ -Linie. Die Hauptbeobachtungsdaten werden tabellarisch sehr übersichtlich zusammengestellt.

*L. Biermann (Babelsberg).*

**Chandrasekhar, S., and Louis R. Henrich:** An attempt to interpret the relative abundances of the elements and their isotopes. *Astrophys. J.* **95**, 288—298 (1942).

Es scheint heute festzustehen, daß in den Sternen nur Reaktionen der leichteren Kerne (bis Stickstoff inkl.) vorkommen, und daß hierdurch das Mischungsverhältnis der Elemente vom Kohlenstoff aufwärts nicht mehr geändert wird. Diese schwereren Elemente müssen demnach schon vor der Bildung der Sterne entstanden sein. Die Bedingungen hierfür sind zuerst von v. Weizsäcker (1938) untersucht worden. In vorliegender Arbeit wird versucht, die Theorie dieser Vorgänge vor allem in quantitativer Hinsicht weiterzuführen. Es zeigt sich, daß bei einer Temperatur von  $8 \cdot 10^9$  und einer Dichte von  $10^7 \text{ g/cm}^3$  ungefähr die beobachteten Häufigkeitsverhältnisse von O bis S entstehen, während H und He im Verhältnis viel zu häufig, die ganz schweren Elemente aber viel zu selten herauskommen. Man müßte danach eine zweite prästellare Epoche mit noch höheren Temperaturen und Dichten annehmen; die schwereren Elemente müßten später „eingefroren“ sein. Die vorläufige Natur dieser Ergebnisse wird betont.

*L. Biermann (Babelsberg).*

**Nicolet, Marcel:** Une équation générale d'ionisation. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **28**, 768—781 (1942).

Die normale Ionisationsformel gilt exakt nur im Fall thermodynamischen Gleichgewichts. Wenn dieses nicht vorliegt, z. B. die Energiedichte der Strahlung nicht ihrer spektralen Zusammensetzung entspricht, kommt es auf die Absorptionskoeffizienten der verschiedenen Zustände, auf die unkompensierten zyklischen Übergänge u. a. an. Verf. gibt eine Form der Ionisationsgleichung, die diesen Umständen Rechnung trägt und die früher von Wolkjen und Pannekoek angegebenen Formeln als Spezialfälle enthält. Die Anwendungen sollen in einer besonderen Arbeit folgen.

*L. Biermann (Babelsberg).*

**Righini, Guglielmo:** Profondità ottica e pressione della cromosfera solare in relazione alla percentuale di idrogeno. *Mem. Soc. astron. Ital.*, N. s. **15**, 217—232 (1943).

Man berechnet den Druck an der Chromosphärenbasis, die optische Tiefe der Chromosphäre und die Intensitätsänderung am Sonnenrand für zwei Fälle, wo das Verhältnis Wasserstoff zu Metall bzw.  $10^3$  und  $6,3 \times 10^3$  ist. In dieser Berechnung verschwindet der Einfluß auf die Opazität (Undurchsichtigkeit) der Sonnenatmosphäre, welcher von dem Prozeß der Photoionisierung der Metalle bewirkt wird, im Verhältnis zur Absorption der negativen Wasserstoffionen.

*Hans S. Jelstrup (Oslo).*

**Esclagon, Ernest:** Sur la réfraction astronomique. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **216**, 100—103 (1943).

Die astronomische Refraktion ist bis  $75^\circ$  Zenitdistanz nahe unabhängig von der Annahme über die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Höhe und läßt sich mittels einer einfachen Formel berechnen. Für größere Höhen versagt der einfache Ausdruck, die Berechnung wird dann sehr mühselig. Verf. gelingt es unter Annahme eines geeigneten Ausdrucks für den Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Höhe, der sich der tatsächlich vorhandenen Dichteverteilung gut anpaßt, das Refraktionsintegral geschlossen zu integrieren und für die Berechnung der Refraktion einen numerisch leicht zu berechnenden Ausdruck anzugeben.

*Mühlig (Potsdam).*